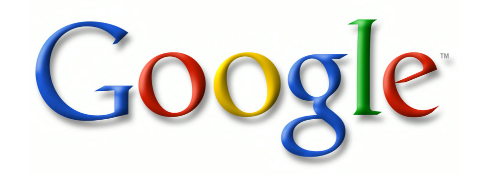






Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Weierstrass, von Helmholtz, Schroeter, Fuchs

von

L. Kronecker.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 108.

In vier Heften.

Mit einer Figurentafel.

Berlin, 1891.
Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 108.

Ueber Invariantensysteme, welche zur Charakterisirung der verschiedenen Klassen bilinearer Formen dienen.

(Von Herrn *H. Rosenow.*)

In einer für die Theorie der bilinearen Formen grundlegenden Arbeit*) hat Herr *Kronecker* ein vollständiges und auf alle bilinearen Formen von beliebig vielen Variabelnpaaren anwendbares Verfahren entwickelt, um durch congruente Transformationen der beiden Variabelnsysteme, d. h. solche, bei denen die Substitutionscoefficienten für beide Reihen correspondirender Variabeln identisch sind, jede bilineare Form in ein Aggregat von „elementaren Formen" überzuführen, welche die Eigenschaft haben, dass die in einer Form auftretenden Variabeln ihr ausschliesslich angehören, also in keiner andern Form vorkommen, und dass sie selbst sich nicht weiter zerlegen lassen. Jede dieser elementaren Formen ist durch eine ganze Zahl, ihre Invariante, charakterisirt, welche gleich der Anzahl der in ihr auftretenden Variabelnpaare ist; wobei es nicht überflüssig erscheint, besonders zu betonen, dass das in Betracht kommende System der beiden Reihen entsprechender Variabeln stets als ein vollständiges anzusehen ist, auch wenn eine der beiden zusammengehörigen Variabeln in der Form gar nicht vorkommt. Indem nun irgend eine zu Grunde gelegte bilineare Form von n Variabelnpaaren in eine Summe von bestimmten elementaren Formen, d. i. in ihre „kanonische" oder „reducirte Form" oder ihre „Normalform" übergeht, gehört ihr ein bestimmtes, aus den Invarianten der einzelnen Elementarformen zusammengesetztes „Invariantensystem" zu, welches ihr mit allen äquivalenten Formen, d. h. allen denjenigen, in die sie durch congruente Substitutionen von nicht verschwindender Determinante sich über-

*) *Kronecker*, Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen. Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom April 1874.

führen lässt, gemeinsam ist, und welches demnach eine ganze „Klasse" von bilinearen Formen kennzeichnet.

Die Summe der dieses „*Kronecker*sche Invariantensystem einer Klasse von bilinearen Formen" ausmachenden Zahlen ist stets gleich der Anzahl der Variabelnpaare der zu Grunde liegenden Form. Bildet man daher alle möglichen Combinationen der Invarianten elementarer Formenklassen zur Summe n, so erhält man dadurch

1) die Anzahl aller möglichen Klassen bilinearer Formen von n Variabelnpaaren,

2) die diese einzelnen Klassen charakterisirenden Invariantensysteme, und

3) die Normalform einer jeden Klasse, auf welche sich alle ihr angehörigen äquivalenten Formen durch congruente Transformationen der Variabeln überführen lassen.

Eine diese drei Punkte umfassende Zusammenstellung soll für die bilinearen Formen von $n = 1, 2, 3, 4$ Variabelnpaaren gegeben und dann gezeigt werden, wie jede folgende Gruppe sich aus den vorhergehenden aufbaut.

Der besondere Charakter dieser aus grössten gemeinsamen Theilern von Functionen der zu Grunde liegenden Elemente hergeleiteten Invarianten, in denen auch die für die Theorie der Schaaren quadratischer und bilinearer Formen fundamentalen „Elementartheiler" des Herrn *Weierstrass* enthalten sind, ist von Herrn *Kronecker* an verschiedenen Stellen *) nachdrücklich betont worden, und es drängt sich die Frage auf, ob nicht auch literale, aus den Coefficienten der zu Grunde liegenden Form in bestimmter Weise zusammengesetzte Bildungen hergestellt werden können, welche ebenfalls geeignet sind, die sämmtlichen Klassen bilinearer Formen einer bestimmten Anzahl von Variabelnpaaren zu charakterisiren. Solche Bildungen würden sich den von *Sylvester* in die Mathematik eingeführten, besonders von *Clebsch* und vielen Anderen weiter ausgebildeten und zumeist für die Behandlung geometrischer Probleme verwertheten Invarianten algebraischen Charakters anreihen.

Diese Frage kann nun in der That bejaht werden. Schon Herr *Christoffel* hat in seiner Arbeit über die Theorie der bilinearen Functionen **)

---

*) Monatsber. der Kgl. Akad. der Wiss. zu Berlin vom Januar 1874 S. 4, März 1874 S. 30 u. 49, April 1874 S. 50, 51 der Separatabdrücke.

**) *Christoffel*, Theorie der bilinearen Functionen. Dieses Journal Bd. 68 S. 253.

eine Methode angegeben, um ein aus Invarianten, Covarianten und zugehörigen Formen bestehendes vollständiges Invariantensystem einer bilinearen Form von n Variabelnpaaren in geschlossenen Ausdrücken aufzustellen, aber dieselben sind bisher noch nicht dazu verwerthet worden, um darauf eine erschöpfende Klassifizirung der bilinearen Formen einer bestimmten Anzahl von Variabelnpaaren zu begründen.

Es soll daher eine Gegenüberstellung der beiden Arten von Invariantensystemen zunächst für die Klassen bilinearer Formen von 3 Variabelnpaaren in tabellarischer Uebersicht gegeben werden, eine eingehende Behandlung der einzelnen Fälle aber einer besonderen Arbeit überlassen bleiben.

I.

Die *Kronecker*schen Invariantensysteme.

1. Die das Invariantensystem einer bilinearen Form von n Variabelnpaaren

$$f = \sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

bildenden Invarianten n_k^0, $n_h^{(+)}$, $n_h^{(-)}$, $n_h^{(\kappa)}$ werden aus der, eine ganze homogene symmetrische Function $n$ten Grades in u und v darstellenden Determinante

$$D = |u a_{ik} + v a_{ki}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

der zugehörigen Schaar mit transponirten (conjugirten) Grundformen $uf+vf'$ folgendermassen hergeleitet*):

A) Verschwindet die Determinante der Formenschaar nebst allen Unterdeterminanten $(n-1)$ter, ... $(n-(\mu-1))$ter Ordnung, und bestehen demnach zwischen den nach den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, bez. $y_1, y_2, \ldots y_n$ genommenen partiellen Ableitungen von $uf+vf'$ μ von einander unabhängige, lineare Relationen, deren Coefficienten ganze, homogene Functionen von u und v sind und auf die möglichst niedrigen Grade $m^0, m', m'', \ldots m^{(\mu-1)}$ in den u und v sich zurückführen lassen, so giebt es μ Invarianten

$$n_k^0 = 2m^{(n-k)}+1 \qquad (k = n, n-1, \ldots n-(\mu-1)),$$

welche in eine Reihe

$$n_{\nu+1}^0, \; n_{\nu+2}^0, \; \ldots \; n_{n-1}^0, \; n_n^0 \qquad (\nu = n-\mu)$$

*) *Kronecker*, Ueber die congruenten Transformationen etc. § 3.

so angeordnet werden sollen, dass jede folgende Zahl nicht kleiner ist als die vorhergehende.

B) Ist wenigstens eine der Unterdeterminanten $(n-\mu)$ter Ordnung von Null verschieden, und verschwinden demnach auch die Unterdeterminanten von der Ordnung $(n-\mu-1)$, ... 2, 1 nicht sämmtlich, so muss jede dieser $n-\mu=\nu$ Reihen von Unterdeterminanten einen grössten gemeinsamen Theiler

$$P_s \qquad (s=\mu,\ \mu+1, \dots n-1)$$

haben, der natürlich auch gleich Eins sein kann.

Die P_s sind ganze homogene Functionen in u und v von absteigendem Grade; jedes P_s ist durch P_{s+1} theilbar, und setzt man

$$P_s = Q_s . P_{s+1},$$

so ergiebt sich:

$$P_s = Q_s . Q_{s+1} \dots Q_{n-2} . Q_{n-1} \qquad (s=\mu,\ \mu+1, \dots n-1).$$

Somit erhält man eine Reihe von $n-\mu=\nu$ ebenfalls ganzen homogenen Functionen Q_s, von denen wiederum jede durch die folgende theilbar ist.

Die Functionen P_s und Q_s, welche bei jeder linearen Transformation der Formenschaar $uf+vf'$ bis auf constante Factoren ungeändert bleiben, bestehen aus Linearfactoren von dreierlei Beschaffenheit:

dem Factor $u+v$,
dem Factor $u-v$,
und Factoren $(uv^{(x)}-vu^{(x)}).(uu^{(x)}-vv^{(x)})$,

welche bez. auftreten, wenn P_μ für die Werthe:

$$-\frac{u}{v}=+1, \quad -\frac{u}{v}=-1, \quad -\frac{u}{v}=-\frac{u^{(x)}}{v^{(x)}} \quad \text{und} \quad -\frac{u}{v}=-\frac{v^{(x)}}{u^{(x)}}\ (u^{(x)} \gtrless v^{(x)})$$

verschwindet.

Bezeichnet man nun die Reihe der charakteristischen Functionen P_s und Q_s durch

$$P_{n-h} \quad \text{und} \quad Q_{n-h} \qquad (h=\nu,\ \nu-1, \dots 2, 1),$$

so sollen unter den Invarianten

$$n_h^{(+)}, \quad n_h^{(-)}, \quad n_h^{(x)}$$

die Exponenten der in Q_{n-h} vorkommenden Factoren

$$u+v, \quad u-v, \quad (uv^{(x)}-vu^{(x)}).(uu^{(x)}-vv^{(x)})$$

verstanden werden, welche Exponenten natürlich auch Null sein können; sie sind demnach zugleich die Zahlen, welche angeben, wievielmal die genannten Factoren in P_{n-h} öfter vorkommen als in P_{n-h+1}, so dass die

Gleichung besteht:

$$\frac{P_{n-h}}{P_{n-h+1}} = Q_{n-h} = (u+v)^{n_h^{(+)}} . (u-v)^{n_h^{(-)}} . \prod_{(\varkappa)} [(uv^{(\varkappa)} - vu^{(\varkappa)})(uu^{(\varkappa)} - vv^{(\varkappa)})]^{n_h^{(\varkappa)}},$$

in welcher der Index $(\varkappa)$ sich auf alle unter einander und von ± 1 verschiedenen Werthverhältnisse von $-\frac{u}{v} = w$ und $-\frac{u}{v} = \frac{1}{w}$ bezieht, wofür die Function P_μ bez. Q_μ verschwindet.

Die Zahlen $n_h^{(+)}$, $n_h^{(-)}$ und $n_h^{(\varkappa)}$ bilden für $h = 1, 2, \ldots \nu$ eine aufsteigende Reihe, derart dass jede folgende nicht kleiner ist als jede vorhergehende.

Da nun jede Zahl n^0, $n^{(+)}$, $n^{(-)}$ und $n^{(\varkappa)}$ eine bestimmte elementare Form charakterisirt*), wobei zu bemerken ist,

1) dass jede Invariante $n_k^0 = 1$ die Anzahl der in der reducirten Form auftretenden Variabelnpaare um ein Paar verringert,

2) dass mit jeder geraden Zahl $n_h^{(+)}$ eine zweite gleich grosse $n_{h-1}^{(+)}$, mit jeder ungeraden Zahl $n_h^{(-)}$ eine zweite gleich grosse $n_{h-1}^{(-)}$ verbunden sein muss,

so erkennt man leicht, — und die folgende Zusammenstellung wird es klar darthun —, wie durch methodische Aufstellung der Invariantensysteme für die bilinearen Formen von n Variabelnpaaren die in der Einleitung hervorgehobenen drei Punkte ihre unmittelbare und gleichzeitige Erledigung finden.

2. Die soeben kurz zusammengefassten, in der genannten Arbeit des Herrn *Kronecker* näher begründeten allgemeinen Ergebnisse der Entwickelung der Invariantensysteme bilinearer Formen von n Variabelnpaaren liefern, auf die Formen von $n = 1, 2, 3$ und 4 Variabelnpaaren angewendet, folgende Resultate.

Im Falle $n = 1$ gehört die einzige reducirte Form $x_0 y_0$ zu der Invariante $n_1^{(+)} = 1$, und ihre charakteristischen Functionen sind $P_0 = u + v$, $Q_0 = P_0$. Die der Invariante $n_1^0 = 1$ entsprechende bilineare Form ist eine identisch verschwindende.

---

*) Vgl. *Kronecker,* a. a. O. die Tabelle in § 3, Art. III, S. 46 der Separatabdrücke.

Im Falle $n = 2$ lauten die Invariantensysteme der einzelnen Klassen:

a) $\mu = 0,\ \nu = 2$:

	1)	2)	3)	4)
$n_1^0\ n_2^0$	0 0	0 0	0 0	0 0
$n_1^{(+)} n_2^{(+)}$	0 0	0 0	0 0	1 1
$n_1^{(-)} n_2^{(-)}$	0 0	0 2	1 1	0 0
$n_1'\ n_2'$	0 1	0 0	0 0	0 0,

b) $\mu = 1,\ \nu = 1$:

	5)
$n_1^0\ n_2^0$	0 1
$n_1^{(+)}$	1
$n_1^{(-)}$	0
n_1'	0,

c) $\mu = 2,\ \nu = 0$: $n_1^0\ n_2^0$ 6) 1 1.

Die Klassen 1) bis 4) umfassen die eigentlichen bilinearen Formen von zwei Variabelnpaaren, die Klasse 5) enthält diejenigen, welche sich durch congruente Substitution auf ein Variabelnpaar reduciren lassen, und die Klasse 6) die identisch verschwindenden.

Die Normalformen, die Determinanten der zugehörigen Schaaren und die charakteristischen Functionen sind:

1) $x_0 y_1 + w' x_1 y_0$.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & u+w'v \\ w'u+v & 0 \end{vmatrix} = -(u+w'v)(w'u+v);\ P_0 = -D,\ P_1 = 1;\ Q_0 = P_0,\ Q_1 = 1.$$

2) $x_0 y_0 + x_1 y_0 - x_0 y_1$.

$$D = \begin{vmatrix} u+v & -(u-v) \\ u-v & 0 \end{vmatrix} = (u-v)^2;\quad P_0 = D,\quad P_1 = 1;\quad Q_0 = P_0,\quad Q_1 = 1.$$

3) $x_0 y_1 - x_1 y_0$.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & u-v \\ -(u-v) & 0 \end{vmatrix} = (u-v)^2;\ P_0 = D,\ P_1 = u-v;\ Q_0 = u-v,\ Q_1 = u-v.$$

Die zu Grunde liegende Form ist eine alternirende.

4) $x_0 y_0 + x_1 y_1$.

$$D = \begin{vmatrix} u+v & 0 \\ 0 & u+v \end{vmatrix} = (u+v)^2;\ P_0 = D,\ P_1 = u+v;\ Q_0 = u+v,\ Q_1 = u+v.$$

Die zu Grunde liegende Form ist eine symmetrische.

5) $x_0 y_0$.

$$D = \begin{vmatrix} u+v & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0;\quad P_1 = u+v;\quad Q_1 = u+v.$$

6) 0.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Im Falle $n = 3$ lauten die Invariantensysteme der einzelnen Klassen:

a) $\mu = 0,\ \nu = 3$:	$n_1^0\ n_2^0\ n_3^0$	1) 0 0 0	2) 0 0 0	3) 0 0 0	4) 0 0 0	5) 0 0 0
	$n_1^{(+)} n_2^{(+)} n_3^{(+)}$	0 0 1	0 0 1	0 0 1	0 0 3	1 1 1
	$n_1^{(-)} n_2^{(-)} n_3^{(-)}$	0 0 0	0 0 2	0 1 1	0 0 0	0 0 0
	$n_1'\ n_2'\ n_3'$	0 0 1	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
b) $\mu = 1,\ \nu = 2$:	$n_1^0\ n_2^0\ n_3^0$	6) 0 0 3	7) 0 0 1	8) 0 0 1	9) 0 0 1	10) 0 0 1
	$n_1^{(+)} n_2^{(+)}$	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1
	$n_1^{(-)} n_2^{(-)}$	0 0	0 0	0 2	1 1	0 0
	$n_1'\ n_2'$	0 0	0 1	0 0	0 0	0 0
c) $\mu = 2,\ \nu = 1$:	$n_1^0\ n_2^0\ n_3^0$	11) 0 1 1				
	$n_1^{(+)}$	1				
	$n_1^{(-)}$	0				
	n_1'	0				
d) $\mu = 3,\ \nu = 0$:	$n_1^0\ n_2^0\ n_3^0$	12) 1 1 1.				

Die Klassen 1) bis 6) umfassen die eigentlichen bilinearen Formen von drei Variabelnpaaren, die Klassen 7) bis 10) enthalten diejenigen, welche sich durch congruente Transformation auf zwei Variabelnpaare, die Klasse 11) diejenigen, welche sich auf ein Variabelnpaar reduciren lassen, und die Klasse 12) die identisch verschwindenden.

Unter den eigentlichen bilinearen Formen von 3 Variabelnpaaren sind die der Klasse 6) angehörigen dadurch bemerkenswerth, ***dass sie sich durch congruente Transformation der Variabeln nicht auf Formen von weniger als drei Paar correspondirender Variabeln zurückführen lassen, obgleich die Determinante der zugehörigen Formenschaar identisch verschwindet.***

Die Normalformen, die Determinanten der zugehörigen Schaaren und die charakteristischen Functionen sind:

1) $x_0 y_0 + (x_1 y_2 + w' x_2 y_1)$.

$$D = \begin{vmatrix} u+v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u+w'v \\ 0 & w'u+v & 0 \end{vmatrix} = -(u+v)(u+w'v)(w'u+v);$$

$$P_0 = -D,\quad P_1 = 1,\quad P_2 = 1;\quad Q_0 = P_0,\quad Q_1 = 1,\quad Q_2 = 1.$$

2) $x_0y_0+(x_1y_1+x_2y_1-x_1y_2)$.

$$D=\begin{vmatrix} u+v & 0 & 0 \\ 0 & u+v & -(u-v) \\ 0 & u-v & 0 \end{vmatrix}=(u+v)(u-v)^2;$$

$$P_0=D,\quad P_1=1,\quad P_2=1;\quad Q_0=P_0,\quad Q_1=1,\quad Q_2=1.$$

3) $x_0y_0+(x_1y_2-x_2y_1)$.

$$D=\begin{vmatrix} u+v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u-v \\ 0 & -(u-v) & 0 \end{vmatrix}=(u+v)(u-v)^2;$$

$$P_0=D,\quad P_1=u-v,\quad P_2=1;\quad Q_0=(u+v)(u-v),\quad Q_1=u-v,\quad Q_2=1.$$

4) $x_0y_0+x_1y_0-x_0y_1+x_2y_1+x_1y_2$.

$$D=\begin{vmatrix} u+v & -(u-v) & 0 \\ u-v & 0 & u+v \\ 0 & u+v & 0 \end{vmatrix}=-(u+v)^3;$$

$$P_0=-D,\quad P_1=1,\quad P_2=1;\quad Q_0=P_0,\quad Q_1=1,\quad Q_2=1.$$

5) $x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2$.

$$D=\begin{vmatrix} u+v & 0 & 0 \\ 0 & u+v & 0 \\ 0 & 0 & u+v \end{vmatrix}=(u+v)^3;$$

$$P_0=D,\quad P_1=(u+v)^2,\quad P_2=(u+v);\quad Q_0=u+v,\quad Q_1=u+v,\quad Q_2=u+v.$$

Die zu Grunde liegende Form ist eine symmetrische.

6) $x_0y_1+x_1y_2$.

$$D=\begin{vmatrix} 0 & u & 0 \\ v & 0 & u \\ 0 & v & 0 \end{vmatrix}\equiv 0;\quad P_1=1,\quad P_2=1;\quad Q_1=1,\quad Q_2=1.$$

Die Normalformen der Klassen 7) bis 10) sind mit den von zwei Variabelnpaaren identisch, während die Normalform für die Klasse 11) mit der von einem Variabelnpaar übereinstimmt.

Im Falle $n=4$ lauten die Invariantensysteme der einzelnen Klassen:

a) $\mu=0,\ \nu=4$:		1)	2)	3)
	$n_1^0\ n_2^0\ n_3^0\ n_4^0$	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	$n_1^{(+)}n_2^{(+)}n_3^{(+)}n_4^{(+)}$	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	$n_1^{(-)}n_2^{(-)}n_3^{(-)}n_4^{(-)}$	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	$n_1'\ n_2'\ n_3'\ n_4'$	0 0 0 1	0 0 0 2	0 0 1 1
	$n_1''\ n_2''\ n_3''\ n_4''$	0 0 0 1	0 0 0 0	0 0 0 0

4)	5)	6)	7)	8)	9)
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 1 1	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 2	0 0 1 1	0 0 0 0	0 0 0 4	0 0 2 2	0 1 1 2
0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0

10)	11)	12)	13)	14)	15)
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 1 1	0 0 0 0	0 0 1 1	0 0 1 3	0 0 2 2	1 1 1 1
0 0 0 2	1 1 1 1	0 0 1 1	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0

b) $\mu = 1,\ \nu = 3$:

	16)	17)	18)	19)	20)	21)
$n_1^0\ n_2^0\ n_3^0\ n_4^0$	0 0 0 3	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1
$n_1^{(+)} n_2^{(+)} n_3^{(+)}$	0 0 1	0 0 1	0 0 1	0 0 1	0 0 3	1 1 1
$n_1^{(-)} n_2^{(-)} n_3^{(-)}$	0 0 0	0 0 0	0 0 2	0 1 1	0 0 0	0 0 0
$n_1'\ n_2'\ n_3'$	0 0 0	0 0 1	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
$n_1''\ n_2''\ n_3''$	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0

c) $\mu = 2,\ \nu = 2$:

	22)	23)	24)	25)	26)
$n_1^0\ n_2^0\ n_3^0\ n_4^0$	0 0 1 3	0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1
$n_1^{(+)} n_2^{(+)}$	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1
$n_1^{(-)} n_2^{(-)}$	0 0	0 0	0 2	1 1	0 0
$n_1'\ n_2'$	0 0	0 1	0 0	0 0	0 0
$n_1''\ n_2''$	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

d) $\mu = 3,\ \nu = 1$:

	27)
$n_1^0\ n_2^0\ n_3^0\ n_4^0$	0 1 1 1
$n_1^{(+)}$	1
$n_1^{(-)}$	0
n_1'	0
n_1''	0

e) $\mu = 4,\ \nu = 0$: $n_1^0\ n_2^0\ n_3^0\ n_4^0$ 28) 1 1 1 1.

Es giebt sechzehn Klassen eigentlicher bilinearer Formen von vier Variabelnpaaren, die sich durch congruente Transformation der Variabeln nicht auf Formen von weniger als vier Paar correspondirender Variabeln zurückführen lassen; darunter eine — Klasse 16) — mit identisch verschwindender Determinante.

Die Klassen 17), ... 22) führen auf Formen von drei Variabelnpaaren, die Klassen 23), ... 26) auf Formen von zwei, die Klasse 27) auf solche von einem Variabelnpaar, und die Formen der Klasse 28) verschwinden identisch.

Die Normalformen, die Determinanten der zugehörigen Schaaren und die charakteristischen Functionen sind:

1) $(x_0y_1+w'x_1y_0)+(x_2y_3+w''x_3y_2)$.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & u+w'v & 0 & 0 \\ w'u+v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+w''v \\ 0 & 0 & w''u+v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (u+w'v)(w'u+v)(u+w''v)(w''u+v);$$

$$P_0 = D, \quad P_1 = P_2 = P_3 = 1; \quad Q_0 = P_0, \quad Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1.$$

2) $x_0y_1+w'x_1y_0+x_1y_2+w'x_2y_1+x_2y_3+w'x_3y_2$.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & u+w'v & 0 & 0 \\ w'u+v & 0 & u+w'v & 0 \\ 0 & w'u+v & 0 & u+w'v \\ 0 & 0 & w'u+v & 0 \end{vmatrix} = [(u+w'v)(w'u+v)]^2;$$

$$P_0 = D, \quad P_1 = P_2 = P_3 = 1; \quad Q_0 = P_0, \quad Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1.$$

3) $(x_0y_1+w'x_1y_0)+(x_2y_3+w'x_3y_2)$.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & u+w'v & 0 & 0 \\ w'u+v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+w'v \\ 0 & 0 & w'u+v & 0 \end{vmatrix} = [(u+w'v)(w'u+v)]^2;$$

$$P_0 = D, \quad P_1 = (u+w'v)(w'u+v), \quad P_2 = P_3 = 1;$$

$$Q_0 = Q_1 = (u+w'v)(w'u+v), \quad Q_2 = Q_3 = 1.$$

4) $(x_0 y_0 + x_1 y_0 - x_0 y_1) + (x_2 y_3 + w' x_3 y_2)$.

$$D = \begin{vmatrix} u+v & -(u-v) & 0 & 0 \\ u-v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+w'v \\ 0 & 0 & w'u+v & 0 \end{vmatrix} = -(u-v)^2 (u+w'v)(w'u+v);$$

$$P_0 = -D, \quad P_1 = P_2 = P_3 = 1; \quad Q_0 = P_0, \quad Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1.$$

5) $(x_0 y_1 - x_1 y_0) + (x_2 y_3 + w' x_3 y_2)$.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & u-v & 0 & 0 \\ -(u-v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+w'v \\ 0 & 0 & w'u+v & 0 \end{vmatrix} = -(u-v)^2 (u+w'v)(w'u+v);$$

$$P_0 = -D, \quad P_1 = u-v, \quad P_2 = P_3 = 1;$$

$$Q_0 = (u-v)(u+w'v)(w'u+v), \quad Q_1 = u-v, \quad Q_2 = Q_3 = 1.$$

6) $x_0 y_0 + x_1 y_1 + (x_2 y_3 + w' x_3 y_2)$.

$$D = \begin{vmatrix} u+v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u+v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+w'v \\ 0 & 0 & w'u+v & 0 \end{vmatrix} = -(u+v)^2 (u+w'v)(w'u+v);$$

$$P_0 = -D, \quad P_1 = u+v, \quad P_2 = P_3 = 1;$$

$$Q_0 = (u+v)(u+w'v)(w'u+v), \quad Q_1 = u+v, \quad Q_2 = Q_3 = 1.$$

7) $x_0 y_0 + x_1 y_0 - x_0 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_3 y_2 - x_2 y_3$.

$$D = \begin{vmatrix} u+v & -(u-v) & 0 & 0 \\ u-v & 0 & u+v & 0 \\ 0 & u+v & 0 & -(u-v) \\ 0 & 0 & u-v & 0 \end{vmatrix} = (u-v)^4;$$

$$P_0 = D, \quad P_1 = P_2 = P_3 = 1; \quad Q_0 = (u-v)^4, \quad Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1.$$

8) $(x_0 y_0 + x_1 y_0 - x_0 y_1) + (x_2 y_2 + x_3 y_2 - x_2 y_3)$.

$$D = \begin{vmatrix} u+v & -(u-v) & 0 & 0 \\ u-v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u+v & -(u-v) \\ 0 & 0 & u-v & 0 \end{vmatrix} = (u-v)^4;$$

$$P_0 = D, \quad P_1 = (u-v)^2, \quad P_2 = P_3 = 1; \quad Q_0 = (u-v)^2, \quad Q_1 = (u-v)^2, \quad Q_2 = Q_3 = 1.$$

9) $(x_0y_0+x_1y_0-x_0y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)$.

$$D=\begin{vmatrix} u+v & -(u-v) & 0 & 0 \\ u-v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u-v \\ 0 & 0 & -(u-v) & 0 \end{vmatrix}=(u-v)^4;$$

$P_0=D,\ \ P_1=(u-v)^2,\ \ P_2=u-v,\ \ P_3=1;\ \ Q_0=(u-v)^2,\ \ Q_1=Q_2=u-v,\ \ Q_3=1.$

10) $x_0y_0+x_1y_1+(x_2y_2+x_3y_2-x_2y_3)$.

$$D=\begin{vmatrix} u+v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u+v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u+v & -(u-v) \\ 0 & 0 & u-v & 0 \end{vmatrix}=(u+v)^2(u-v)^2;$$

$$P_0=D,\quad P_1=u+v,\quad P_2=P_3=1;$$
$$Q_0=(u+v)(u-v)^2,\quad Q_1=u+v,\quad Q_2=Q_3=1.$$

11) $(x_0y_1-x_1y_0)+(x_2y_3-x_3y_2)$.

$$D=\begin{vmatrix} 0 & u-v & 0 & 0 \\ -(u-v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u-v \\ 0 & 0 & -(u-v) & 0 \end{vmatrix}=(u-v)^4;$$

$P_0=D,\ \ P_1=(u-v)^3,\ \ P_2=(u-v)^2,\ \ P_3=u-v;\ \ Q_0=Q_1=Q_2=Q_3=u-v.$

Die zu Grunde liegende Form ist eine alternirende.

12) $x_0y_0+x_1y_1+(x_2y_3-x_3y_2)$.

$$D=\begin{vmatrix} u+v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u+v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u-v \\ 0 & 0 & -(u-v) & 0 \end{vmatrix}=(u+v)^2(u-v)^2;$$

$$P_0=D,\quad P_1=(u+v)(u-v),\quad P_2=P_3=1;$$
$$Q_0=Q_1=(u+v)(u-v),\quad Q_2=Q_3=1.$$

13) $x_0y_0+(x_1y_1+x_2y_1-x_1y_2+x_3y_2+x_2y_3)$.

$$D=\begin{vmatrix} u+v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u+v & -(u-v) & 0 \\ 0 & u-v & 0 & u+v \\ 0 & 0 & u+v & 0 \end{vmatrix}=-(u+v)^4;$$

$P_0=-D,\ \ P_1=u+v,\ \ P_2=P_3=1;\ \ Q_0=(u+v)^3,\ \ Q_1=u+v,\ \ Q_2=Q_3=1.$

14) $x_0y_1+x_1y_0+x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3+x_3y_2$.

$$D=\begin{vmatrix} 0 & u+v & 0 & 0 \\ u+v & 0 & u-v & 0 \\ 0 & -(u-v) & 0 & u+v \\ 0 & 0 & u+v & 0 \end{vmatrix}=(u+v)^4;$$

$P_0=D,\quad P_1=(u+v)^2,\quad P_2=P_3=1;\quad Q_0=Q_1=(u+v)^2,\quad Q_2=Q_3=1.$

15) $x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$.

$$D=\begin{vmatrix} u+v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u+v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u+v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+v \end{vmatrix}=(u+v)^4;$$

$P_0=D,\quad P_1=(u+v)^3,\quad P_2=(u+v)^2,\quad P_3=(u+v);\quad Q_0=Q_1=Q_2=Q_3=u+v.$
Alle symmetrischen Formen von vier Variabelnpaaren mit nicht verschwindender Determinante gehören dieser Klasse an.

16) $x_0y_0+(x_1y_2+x_2y_3)$.

$$D=\begin{vmatrix} u+v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & v & 0 & u \\ 0 & 0 & v & 0 \end{vmatrix}\equiv 0;\; P_1=u+v,\; P_2=P_3=1;\; Q_1=u+v,\; Q_2=Q_3=1.$$

Die Normalformen der Klassen 17), ... 22) sind mit den von drei, die der Klassen 23), ... 26) mit den von zwei Variabelnpaaren identisch, und die Normalform der Klasse 27) stimmt mit der von einem Variabelnpaar überein.

3. Um einen Einblick in den Aufbau der Invariantensysteme und Normalformen bei dem Fortschreiten der bilinearen Formen von h auf $h+1$ Variabelnpaare zu gewinnen, ist es zweckmässig, die elementaren Formen nach der Anzahl der in ihnen auftretenden Variabelnpaare zu ordnen:

Es giebt nur eine Elementarform mit einem Variabelnpaar: x_0y_0. Ihre Invariante ist $n_1^{(+)}=1$ und die Determinante der zugehörigen Formenschaar $|u+v|$.

Es giebt drei Elementarformen mit zwei Variabelnpaaren:

$$x_0y_1-x_1y_0;\quad x_0y_0+(x_1y_0-x_0y_1);\quad x_0y_1+w^{(x)}x_1y_0;$$

charakterisirt durch die Invarianten:

$$n_1^{(-)}=n_2^{(-)}=1;\quad n_2^{(-)}=2;\quad n_2^{(x)}=1.$$

Die Determinanten der zugehörigen Schaaren sind:

$$\begin{vmatrix} 0 & u-v \\ -(u-v) & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u+v & -(u-v) \\ u-v & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & u+w^{(x)}v \\ w^{(x)}u+v & 0 \end{vmatrix}.$$

Es giebt zwei Elementarformen mit drei Variabelnpaaren:

$$x_0y_1+x_1y_2; \quad x_0y_0+(x_1y_0-x_0y_1)+(x_2y_1+x_1y_2);$$

charakterisirt durch die Invarianten:

$$n_3^{(-)}=3; \quad n_3^{(+)}=3.$$

Die Determinanten der zugehörigen Schaaren sind:

$$\begin{vmatrix} 0 & u & 0 \\ v & 0 & u \\ 0 & v & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u+v & -(u-v) & 0 \\ u-v & 0 & u+v \\ 0 & u+v & 0 \end{vmatrix}.$$

Es giebt drei Elementarformen mit vier Variabelnpaaren:

$$(x_0y_1+x_1y_0)+(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3+x_3y_2);$$

$$x_0y_0+(x_1y_0-x_0y_1)+(x_2y_1+x_1y_2)+(x_3y_2-x_2y_3);$$

$$(x_0y_1+w^{(x)}x_1y_0)+(x_1y_2+w^{(x)}x_2y_1)+(x_2y_3+w^{(x)}x_3y_2);$$

charakterisirt durch die Invarianten:

$$n_3^{(+)}=n_4^{(+)}=2; \quad n_4^{(-)}=4; \quad n_4^{(x)}=2.$$

Die Determinanten der zugehörigen Schaaren sind:

$$\begin{vmatrix} 0 & u+v & 0 & 0 \\ u+v & 0 & u-v & 0 \\ 0 & -(u-v) & 0 & u+v \\ 0 & 0 & u+v & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u+v & -(u-v) & 0 & 0 \\ u-v & 0 & u+v & 0 \\ 0 & u+v & 0 & -(u-v) \\ 0 & 0 & u-v & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & u+w^{(x)}v & 0 & 0 \\ w^{(x)}u+v & 0 & u+w^{(x)}v & 0 \\ 0 & w^{(x)}u+v & 0 & u+w^{(x)}v \\ 0 & 0 & w^{(x)}u+v & 0 \end{vmatrix}.$$

Es giebt zwei Elementarformen mit fünf Variabelnpaaren:

$$x_0y_1+x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4;$$

$$x_0y_0+(x_1y_0-x_0y_1)+(x_2y_1+x_1y_2)+(x_3y_2-x_2y_3)+(x_4y_3+x_3y_4);$$

charakterisirt durch die Invarianten:

$$n_5^{()}=5; \quad n_5^{(+)}=5.$$

Die Determinanten der zugehörigen Schaaren sind:

$$\begin{vmatrix} 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u+v & -(u-v) & 0 & 0 & 0 \\ u-v & 0 & u+v & 0 & 0 \\ 0 & u+v & 0 & -(u-v) & 0 \\ 0 & 0 & u-v & 0 & u+v \\ 0 & 0 & 0 & u+v & 0 \end{vmatrix}.$$

Es giebt drei Elementarformen mit sechs Variabelnpaaren:

$$(x_0y_1-x_1y_0)+(x_1y_2+x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_4+x_4y_3)+(x_4y_5-x_5y_4);$$

$$x_0y_0+(x_1y_0-x_0y_1)+(x_2y_1+x_1y_2)+(x_3y_2-x_2y_3)+(x_4y_3+x_3y_4)+(x_5y_4-x_4y_5);$$

$$(x_0y_1+w^{(\varkappa)}x_1y_0)+(x_1y_2+w^{(\varkappa)}x_2y_1)+(x_2y_3+w^{(\varkappa)}x_3y_2)+(x_3y_4+w^{(\varkappa)}x_4y_3)$$
$$+(x_4y_5+w^{(\varkappa)}x_5y_4);$$

charakterisirt durch die Invarianten:

$$n_5^{(-)} = n_6^{(-)} = 3; \quad n_6^{(-)} = 6; \quad n_6^{(\varkappa)} = 3.$$

Die Determinanten der zugehörigen Schaaren sind:

$$\begin{vmatrix} 0 & u-v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(u-v) & 0 & u+v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u+v & 0 & u-v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(u-v) & 0 & u+v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+v & 0 & u-v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(u-v) & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} u+v & -(u-v) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u-v & 0 & u+v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u+v & 0 & -(u-v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u-v & 0 & u+v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+v & 0 & -(u-v) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u-v & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & u+w^{(\varkappa)}v & 0 & 0 & 0 \\ w^{(\varkappa)}u+v & 0 & u+w^{(\varkappa)}v & 0 & 0 \\ 0 & w^{(\varkappa)}u+v & 0 & u+w^{(\varkappa)}v & 0 \\ 0 & 0 & w^{(\varkappa)}u+v & 0 & u+w^{(\varkappa)}v \\ 0 & 0 & 0 & w^{(\varkappa)}u+v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w^{(\varkappa)}u+v \end{vmatrix}.$$

Weiter fortschreitend erhält man stets *abwechselnd zwei und drei Elementarformen für eine ungerade und eine gerade Anzahl von Variabelnpaaren.*

Die zu den zweifach zu zählenden Invarianten $n^{(\varkappa)}$ gehörigen Elementarformen gelten für alle unter sich und von ± 1 verschiedenen Werthe $w^{(\varkappa)}$.

Bezeichnet man mit n_h die Anzahl der Klassen eigentlicher bilinearer Formen von h Variabelnpaaren, d. h. derjenigen, welche sich durch congruente Transformation der Variabeln nicht auf Formen von weniger als h Paaren correspondirender Variabeln reduciren lassen, und mit N_h die Gesammtzahl der Klassen bilinearer Formen von h Variabelnpaaren, so ist

$$N_h = \sum_i n_i = N_{h-1} + n_h \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots h;\ n_0 = 1).$$

Bei der Bestimmung von n_{h+1} besteht ein wesentlicher Unterschied darin, ob der Uebergang zu einer ungeraden oder zu einer geraden Anzahl von Variabelnpaaren erfolgt; denn nur bei letzterem kann ein neuer Wurzelwerth $w^{(\varkappa)}$ hinzutreten.

In jedem Falle sind unter den n_{h+1} Klassen eigentlicher Formen von $h+1$ Variabelnpaaren n_h Formenklassen enthalten, deren reducirte Formen durch Anfügung der Elementarform $x_{h+1}y_{h+1}$ aus der vorangehenden Gruppe hervorgehen. Damit scheiden von den sämmtlichen Combinationen mit Wiederholung zur Summe $h+1$, welche man zur Aufstellung der n_{h+1} Invariantensysteme zu bilden hat, alle die Zahl Eins enthaltenden aus.

Ferner gelten folgende Sätze:

Die Anzahl der den Combinationen von p gleichen ungeraden Zahlen entsprechenden Klassen ist gleich $p+1$.

Treten zu einer beliebigen, q Formenklassen umfassenden Combination p gleiche, in derselben nicht vorkommende ungerade Zahlen hinzu, so ist die Anzahl der zu der neuen Combination gehörigen Klassen gleich $(p+1).q$.

Tritt zu einer nur aus ungeraden Zahlen bestehenden, r Formenklassen umfassenden Combination eine gerade Zahl hinzu, so ist die der neuen Combination zukommende Klassenanzahl gleich $3r$.

Somit bedürfen nur die Combinationen von geraden Zahlen einer besonderen Untersuchung*); es liefern:

die Combination von 2 gleichen geraden Zahlen	7	Formenklassen;
„ „ „ 2 ungleichen geraden Zahlen	10	„
„ „ „ 3 gleichen geraden Zahlen	14	„

*) vgl. „Ueber die Anzahl von Klassen bilinearer Formen“. Wissenschaftliche Beilage zum Programm der 4. höheren Bürgerschule zu Berlin. Ostern 1891.

die Combination von 2 gleichen und 1 ungleichen gerad. Zahlen 25 Formenkl.
„ „ „ 3 ungleichen geraden Zahlen 37 „
„ „ „ 4 gleichen geraden Zahlen 26 „
u. s. f.

Hiernach ergeben sich für die eigentlichen bilinearen Formen von fünf Variabelnpaaren, bei denen nur die Combinationen 5 und (3+2) mit 2 und 6 Formen zu den den Combinationen (4+1), (3+1+1), (2+2+1), (2+1+1+1), (1+1+1+1+1) entsprechenden $n_4 = 16$ Formen hinzutreten, 24 verschiedene Klassen. Es ist:

$$n_5 = 24, \quad N_5 = N_4 + n_5 = 52.$$

Bei den bilinearen Formen von sechs Variabelnpaaren liefern die Combinationen 6, (4+2), (3+3), (2+2+2) zu den $n_5 = 24$ Klassen noch $3+10+3+14 = 30$ neue hinzu; also wird:

$$n_6 = 54, \quad N_6 = 106.$$

In gleicher Weise ergiebt sich:

$$n_7 = 82, \quad N_7 = 188,$$
$$n_8 = 166, \quad N_8 = 354,$$
$$n_9 = 252, \quad N_9 = 606,$$
u. s. f.

Ebenso wie die Bestimmung der Anzahl aller möglichen verschiedenen Klassen bilinearer Formen von n Variabelnpaaren kann auch die Aufstellung der sie charakterisirenden Invariantensysteme durch Vereinigung der den einzelnen Combinationen zur Summe n zukommenden, verschiedenen Invariantensysteme erfolgen. Dass damit die vollständige Darstellung sämmtlicher bilinearer Formen von beliebig vielen Variabelnpaaren zunächst in ihren reducirten Formen, dann aber auch die aller äquivalenten Formen, welche man aus ihnen durch congruente Substitutionen mit nicht verschwindender Determinante erhält, ihre gleichzeitige Lösung findet, geht aus dem Vorhergehenden hervor.

II.

Die algebraischen Invariantensysteme für die bilinearen Formen von drei Variabelnpaaren.

1. Bezeichnet man mit

$$(ua_{ik} + va_{ki}) \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

das System der Coefficienten einer bilinearen Form von drei Variabelnpaaren *)

$$f(u, v) = uf + vf' = \sum_{i,k} (u a_{ik} + v a_{ki}) x_i y_k$$

aus der einer zu Grunde liegenden bilinearen Form

$$f = \sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k$$

zugehörigen Schaar mit transponirten Grundformen, und mit

$$|u a_{ik} + v a_{ki}|$$

die Determinante der Formenschaar $uf + vf'$; setzt man ferner

$$s_{ik} = \tfrac{1}{2}(a_{ik} + a_{ki}), \quad t_{ik} = \tfrac{1}{2}(a_{ik} - a_{ki}), \quad t_{23} = d_1, \quad t_{31} = d_2, \quad t_{12} = d_3,$$

$$\sum_i s_{ik} \sigma_{il} = \delta_{kl} . |s_{ik}| = \delta_{kl} . \sigma, \quad \sum_i a_{ik} A_{il} = \delta_{kl} . |a_{ik}| = \delta_{kl} . A \quad (\delta_{kk} = 1,\ \delta_{kl} = 0,\ k \gtrless l),$$

$$S_{ik} = \tfrac{1}{2}(A_{ik} + A_{ki}), \quad T_{ik} = \tfrac{1}{2}(A_{ik} - A_{ki}), \quad T_{23} = D_1, \quad T_{31} = D_2, \quad T_{12} = D_3,$$

$$\sum_{ik} s_{ik} d_i d_k = \sum_i D_i d_i = \delta,$$

so sind die Systeme

$$(s_{ik}), \quad (t_{ik}), \quad (\sigma_{ik}), \quad (T_{ik})$$

und die Grössen

$$\sigma \quad \text{und} \quad \delta$$

hinreichend, um sämmtliche in der Determinante

$$|u a_{ik} + v a_{ki}|$$

auftretenden Elemente erster, zweiter und dritter Ordnung, sowie auch alle übrigen aus ihnen sich zusammensetzenden Bildungen darzustellen. Insbesondere ist, wenn man noch

$$u + v = p, \quad u - v = q$$

setzt:

$$u a_{ik} + v a_{ki} = a_{ik}(uv) = p s_{ik} + q t_{ik},$$

$$\frac{\partial |u a_{ik} + v a_{ki}|}{\partial (u a_{ik} + v a_{ki})} = A_{ik}(uv) = p^2 \sigma_{ik} + p q T_{ik} + q^2 d_i d_k,$$

$$|u v_{ik} + v a_{ki}| = A(uv) = p^3 \sigma + p q^2 \delta,$$

und dabei können

(s_{ik}) und (D_i) als die Coefficienten der beiden Covarianten,

(σ_{ik}) und (d_i) „ „ „ „ „ zugehörigen Formen,

σ und δ als die beiden Invarianten

---

*) Die Indices und Summationsbuchstaben $i, k, \ldots$ beziehen sich dementsprechend im Folgenden stets auf die Zahlen 1, 2, 3.

angesehen werden, welche das vollständige Invariantensystem einer bilinearen Form von drei Variabelnpaaren*) und auch das vollständige simultane Formensystem des aus einer Form mit nur einer Reihe von Punktcoordinaten und einer Form mit nur einer Reihe von Liniencoordinaten bestehenden „reducirten, äquivalenten Systems“ einer bilinearen Form**) von drei Variabelnpaaren ausmachen.

Zwischen diesen linear von einander unabhängigen Grössen besteht eine Anzahl von Beziehungen, unter denen hier nur die identischen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \delta s_{ii} - D_i^2 &= \sigma_{kk}\, d_l^2 - 2\sigma_{kl}\, d_k\, d_l + \sigma_{ll}\, d_k^2, \\ \delta \sigma_{ii} - \sigma d_i^2 &= s_{kk} D_l^2 - 2 s_{kl} D_k D_l + s_{ll} D_k^2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i \lessgtr k \lessgtr l \\ i,\, k,\, l = 1,\, 2,\, 3 \end{pmatrix}$$

hervorgehoben werden mögen.

Sind nun zwei bilineare Formen von drei Variabelnpaaren und demnach auch ihre zugehörigen Schaaren mit transponirten Grundformen äquivalent, d. h. lassen sie sich durch *congruente* Transformation der beiden Variabelnsysteme in einander überführen, so stimmen auch ihre „reducirten Systeme“, wie die obigen Grössen genannt werden mögen, in ihren charakteristischen Eigenschaften überein, und umgekehrt sind diese letzteren geeignet, die Klasse äquivalenter bilinearer Formen zu charakterisiren.

Charakteristische Eigenschaften aber *bilden das Verschwinden ganzer Systeme in allen ihren Elementen*, und darauf lässt sich nun die folgende Klasseneintheilung für die bilinearen Formen von drei Variabelnpaaren begründen. Dabei ist zu bemerken, dass das Verschwinden von (s_{ik}) auch das von (σ_{ik}), (T_{ik}), σ und δ nach sich zieht,

$$\begin{aligned} &\text{dass aus } (t_{ik}) \equiv 0 \text{ auch } (T_{ik}) \equiv 0 \text{ und } \delta = 0, \\ &\quad \text{aus } (\sigma_{ik}) \equiv 0 \text{ auch } \quad \sigma = 0, \\ &\quad \text{aus } (T_{ik}) \equiv 0 \text{ auch } \quad \delta = 0 \text{ und } \begin{cases} (t_{ik}) \equiv 0, \text{ wenn } \sigma \lessgtr 0, \\ \quad \sigma = 0, \text{ wenn } (t_{ik}) \lessgtr 0, \end{cases} \end{aligned}$$

folgt. Bei einem nicht verschwindenden System genügt es, dass wenigstens eins der Elemente von Null verschieden ist.

Die 12 Klassen bilinearer Formen von drei Variabelnpaaren sind — in derselben Reihenfolge wie unter I, 2. S. 7 aufgeführt — charakterisirt

---

*) *Christoffel,* Theorie der bilinearen Functionen. Dieses Journal, Bd. 68, S. 259.

**) *Clebsch-Lindemann,* Vorlesungen über Geometrie. Leipzig 1876, Bd. I, S. 924.

durch die Invariantensysteme:

1)	$(s_{ik}) \lesseqgtr 0,$	$(t_{ik}) \lesseqgtr 0,$	$(\sigma_{ik}) \lesseqgtr 0,$	$(T_{ik}) \lesseqgtr 0,$	$\sigma \lesseqgtr 0,$	$\delta \lesseqgtr 0,$
2)	·	·	·	·	$\sigma = 0,$	·
3)	·	·	$(\sigma_{ik}) = 0,$	·	$\sigma = 0,$	·
4)	·	·	·	·	·	$\delta = 0,$
5)	·	$(t_{ik}) = 0,$	·	$(T_{ik}) = 0,$	·	$\delta = 0,$
6)	·	·	·	·	$\sigma = 0,$	$\delta = 0,$
7)	·	·	·	$(T_{ik}) = 0,$	$\sigma = 0,$	$\delta = 0,$
8)	·	·	$(\sigma_{ik}) = 0,$	$(T_{ik}) = 0,$	$\sigma = 0,$	$\delta = 0,$
9)	$(s_{ik}) = 0,$	·	$(\sigma_{ik}) = 0,$	$(T_{ik}) = 0,$	$\sigma = 0,$	$\delta = 0,$
10)	·	$(t_{ik}) = 0,$	·	$(T_{ik}) = 0,$	$\sigma = 0,$	$\delta = 0,$
11)	·	$(t_{ik}) = 0,$	$(\sigma_{ik}) = 0,$	$(T_{ik}) = 0,$	$\sigma = 0,$	$\delta = 0,$
12)	$(s_{ik}) = 0,$	$(t_{ik}) = 0,$	$(\sigma_{ik}) = 0,$	$(T_{ik}) = 0,$	$\sigma = 0,$	$\delta = 0.$

Sollen zwei der ersten Klasse angehörige Formen äquivalent sein, so müssen sie noch in der absoluten Invariante

$$w' = c = \frac{\sqrt{-\sigma} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{-\sigma} + \sqrt{\delta}}$$

übereinstimmen, und ebenso ist zur Aequivalenz zweier der 7. Klasse angehörigen Formen die Uebereinstimmung in einer ähnlich gebildeten, bei den bilinearen Formen von zwei Variabelnpaaren auftretenden absoluten Invariante erforderlich; die Formen einer der übrigen Klassen lassen sich sämmtlich durch congruente Transformation auf dieselbe, in I, 2. angegebene „Normalform" und daher auch in einander überführen. *Diese Reduction auf die Normalform lässt sich für jede bilineare Form von* 3 *Variabelnpaaren auch mit unbestimmten Coefficienten* (a_{ik}) *unter alleiniger Voraussetzung der charakteristischen Eigenschaften der zugehörigen reducirten Systeme ganz allgemein und mit vollständiger Angabe der Coefficienten der Substitution ausführen;* die dabei zur Anwendung gelangenden Methoden sind in der Arbeit des Herrn *Kronecker**) *„Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen"* vollständig enthalten.

Die wirkliche Durchführung dieser Reduction möge einer zusammenhängenden Darstellung der Theorie der bilinearen Formen von drei Variabeln-

*) Monatsber. der Kgl. Akad. der Wiss. zu Berlin vom April 1874. § 2.

paaren vorbehalten bleiben, in welcher auch die hier getroffene Wahl der das Invariantensystem bildenden reducirten Systeme gerechtfertigt werden soll.

2. Die Ausrechnung der reducirten Systeme bietet ein einfaches Mittel dar, um in jedem einzelnen Falle die Zugehörigkeit der gegebenen bilinearen Form von drei Variabelnpaaren zu einer der zwölf Klassen festzustellen.

Zur Erläuterung des Gesagten diene folgendes Beispiel: Ist

$$f = \sum_{ik} a_{ik} x_i y_k = 3x_1y_3 + 2x_2y_1 - 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3,$$

also

$$(a_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A_{ik}) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

so ist das zugehörige reducirte System:

$$(s_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (t_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; d_1 = -1, \; d_2 = -2, \; d_3 = -1,$$

$$(\sigma_{ik}) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (T_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = -3, \quad D_2 = 3, \quad D_3 = -3,$$

$$\sigma = |s_{ik}| = 0, \quad \delta = \sum_i D_i d_i = 0;$$

die Form gehört demnach zur sechsten Klasse.

Um das „*Kronecker*sche Invariantensystem" der Form f zu bestimmen, verfahren wir folgendermassen: Es ist

$$|u a_{ik} + v a_{ki}| = \begin{vmatrix} 0 & 2v & 3u-v \\ 2u & -2(u+v) & -u+v \\ -u+3v & u-v & 2(u+v) \end{vmatrix} \equiv 0,$$

während die ersten Unterdeterminanten nicht sämmtlich verschwinden. Demnach besteht zwischen den partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f(uv)}{\partial x_1} = \sum_k (u a_{1k} + v a_{k1}) y_k = \qquad 0 . y_1 + \qquad 2v y_2 + (3u - v) y_3,$$

$$\frac{\partial f(uv)}{\partial x_2} = \sum_k (u a_{2k} + v a_{k2}) y_k = \qquad 2u . y_1 - 2(u+v) y_2 - \; (u-v) y_3,$$

$$\frac{\partial f(uv)}{\partial x_3} = \sum_k (u a_{3k} + v a_{k3}) y_k = -(u - 3v) y_1 + \; (u-v) y_2 + 2(u+v) y_3$$

eine identische Gleichung:

$$A_{1i}(uv)\frac{\partial f(uv)}{\partial x_1}+A_{2i}(uv)\frac{\partial f(uv)}{\partial x_2}+A_{3i}(uv)\frac{\partial f(uv)}{\partial x_3} = 0 \qquad (i=1,2,3),$$

d. i. für $i=1$:

$$(-3u^2-10uv-3v^2)\frac{\partial f(uv)}{\partial x_1}+(3u^2-8uv-3v^2)\frac{\partial f(uv)}{\partial x_2}+(6u^2+2uv)\frac{\partial f(uv)}{\partial x_3}=0,$$

welche nach Absonderung des gemeinsamen Factors $(3u+v)$ die Form erhält:

$$-(u+3v)\frac{\partial f(uv)}{\partial x_1}+(u-3v)\frac{\partial f(uv)}{\partial x_2}+2u\cdot\frac{\partial f(uv)}{\partial x_3} = 0,$$

und eine entsprechende Relation:

$$-(3u+v)\frac{\partial f(uv)}{\partial y_1}-(3u-v)\frac{\partial f(uv)}{\partial y_2}+2v\cdot\frac{\partial f(uv)}{\partial y_3} = 0.$$

besteht zwischen den partiellen Ableitungen nach y_i.

Diese reducirte Gleichung ist homogen und linear in u und v, demnach ist $m^0=1$, also $n^0=2m^0+1=3$.

Da ferner die Unterdeterminanten zweiter Ordnung:

$$(A_{ik}(uv)) = \begin{pmatrix} -(u+3v)(3u+v) & -(u+3v)(3u-v) & 2v(u+3v) \\ (u-3v)(3u+v) & (u-3v)(3u-v) & -2v(u-3v) \\ 2u(3u+v) & 2u(3u-v) & -2v.2u \end{pmatrix}$$

keinen gemeinsamen von u und v abhängigen Factor haben, so ist $n^0=3$ die einzige Invariante.

Die Form gehört demnach zur sechsten Klasse. —

In der That geht

$$f = 3x_1y_3+2x_2y_1-2x_2y_2-x_2y_3-x_3y_1+x_3y_2+2x_3y_3$$

durch die für x und y übereinstimmende Substitution:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_1 &= 2x_2-x_3, & \mathfrak{y}_1 &= 2y_2-y_3, \\ \mathfrak{x}_2 &= x_1-x_2+x_3, & \mathfrak{y}_2 &= y_1-y_2+y_3, \\ \mathfrak{x}_3 &= 3x_3, & \mathfrak{y}_3 &= 3y_3 \end{aligned}$$

mit der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

in die Form:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2+\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_3,$$

und $uf+vf'$ durch dieselbe Substitution in

$$u\mathfrak{f}+v\mathfrak{f}' = u(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2+\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_3)+v(\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1+\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_2)$$

mit der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & u & 0 \\ v & 0 & u \\ 0 & v & 0 \end{vmatrix}$$

über, und das ist die Normalform der sechsten Klasse, welche aus einer einzigen elementaren Form besteht.

Für diese reducirte Form $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2+\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_3$ oder das nunmehr zu Grunde liegende System

$$(a_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist:}$$

$$(s_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (t_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\sigma_{ik}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad (T_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = 0, \quad \delta = 0.$$

Die charakteristischen Eigenschaften des reducirten Systems sind also erhalten geblieben.

3. Die Determinanten aller den Klassen 6) bis 12) angehörigen bilinearen Formen von drei Variabelnpaaren verschwinden ebenso wie die der zugehörigen Schaaren mit transponirten Grundformen identisch, aber umgekehrt gehören nicht alle Formen mit verschwindender Determinante den genannten Klassen an; vielmehr kommen in jeder einer beliebigen bilinearen Form zugehörigen Schaar Formen vor, deren Determinante gleich Null ist, ebenso wie jedes Kegelschnittbüschel zerfallende Kegelschnitte enthält, und dies gilt ganz allgemein für n Variabelnpaare. Grade diese besonderen oder singulären Formen der Schaar sind für die Reduction auf die Normalform von entscheidender Wichtigkeit. Bedeutet doch auch die Ueberführung auf die kanonische Form in geometrischer Auffassung nichts anderes als die Transformation auf ein ganz specielles, singuläres Coordinatensystem, dessen Elemente zu den durch die gleich Null gesetzte bilineare Form dargestellten geometrischen Gebilden in einer inneren, von dem zu Grunde gelegten Coordinatensysteme unabhängigen, invarianten Beziehung stehen.

Aus diesem Grunde gehen die algebraischen Behandlungen der hier in Betracht kommenden geometrischen Probleme, sei es, dass man sie als lineare Verwandtschaft der Reciprocität (Correlation), oder unter gleichzeitiger Betrachtung der zu Grunde liegenden Form und ihrer transponirten als eine besondere, schon von *Steiner* aufgestellte Verwandtschaft zweiten Grades auffasst, zumeist von den reducirten Verwandtschaftsgleichungen selbst aus, und weisen somit eine Lücke auf, nämlich den Sprung von der allgemeinen, alle speciellen Fälle umfassenden Verwandtschaftsgleichung zu den eben charakterisirten, den einzelnen speciellen Fällen eigenthümlichen reducirten Verwandtschaftsgleichungen.

Es ist das Verdienst der *Weierstrass*schen und *Kronecker*schen Arbeiten, durch Aufstellung der kanonischen oder Normalformen für alle möglichen verschiedenen Klassen bilinearer Formen und Formenschaaren eben diesen Ausgangspunkt geschaffen zu haben, und diese Resultate haben auch, namentlich soweit sie sich auf die *Weierstrass*schen Elementartheiler beziehen, vielfache Anwendung gefunden, während man auf die umfassenderen *Kronecker*schen Invariantensysteme die Aufmerksamkeit weniger gerichtet zu haben scheint. Beide Mathematiker haben auch vollkommen ausreichende, präcise Vorschriften gegeben, welche es ermöglichen, in jedem einzelnen Falle mit mehr oder weniger grossen rechnerischen Schwierigkeiten die Ueberführung auf die Normalform auszuführen.

Dem gegenüber dürfte die Bedeutung der algebraischen Invariantensysteme darin liegen, dass mittels derselben diese vielgenannte und für viele Gebiete der reinen und angewandten Mathematik überaus wichtige Reduction auch ganz allgemein ausgeführt werden kann; sie dürften somit dazu bestimmt sein, jene oben bezeichnete Lücke auszufüllen.

Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme.

IV. Artikel. Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden.

Hierzu Tafel I, Fig. 1—16.

(Von Herrn *Guido Hauck.*)

Einleitung.

Schon im II. Artikel *) wurde festgestellt, dass in zwei ***projectiv-trilinearen*** ebenen Systemen die zugeordneten Punkte auf je drei zugeordneten geraden Linien drei projectivische Punktreihen bilden. Eine Ausnahme hievon machen jedoch die auf den drei ***Hauptaxen*** enthaltenen Punktreihen, welche in trilinearer Beziehung stehen, und zwar, wie sich zeigen wird, in trilinearer Beziehung der allgemeinsten Art. Was andererseits die Strahlenbüschel anlangt, so werden wir finden, dass zwischen drei zugeordneten Strahlenbüscheln jederzeit eine trilineare Beziehung besteht.

Umgekehrt ergiebt sich, dass in zwei ***sectiv-trilinearen*** ebenen Systemen je drei zugeordnete Strahlenbüschel (mit Ausnahme der in den sogenannten ***Hauptpunkten*** liegenden) in projectivischer, dagegen je drei zugeordnete Punktreihen in trilinearer Beziehung stehen.

Bevor nun die diesbezüglichen Eigenschaften der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme weiter verfolgt werden, muss eine Erörterung der Eigenschaften der trilinearen Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden, soweit sie für den vorliegenden Zweck in Betracht kommen, vorausgehen.

Herr *Schubert* hat hiefür in seiner grundlegenden Abhandlung **)

---

*) S. dieses Journal, Bd. 97, S. 261.

**) S. *Schubert*, „Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden.“ Math. Annalen, Bd. XVII (1880), S. 457.

den Weg gebahnt. Er ging dabei von der ***sectiven*** Erzeugungsweise trilinearer Punktreihen aus. Im folgenden wird die Untersuchung auf Grund der ***projectiven*** Erzeugung geführt; und zwar werden zuerst die wichtigsten Eigenschaften der ***doppelkernig-trilinearen*** Beziehung, dann der ***einzelkernig-trilinearen*** Beziehung zwischen drei Punktreihen, Strahlenbüscheln oder Ebenenbüscheln entwickelt und constructiv verwerthet; hierauf werden die Beziehungen zwischen drei Strahlenbüscheln erörtert, welche in drei projectiv-trilinearen ebenen Systemen einander zugeordnet sind.

§ 1.

Doppelkernig-trilineare Punktreihen. Die Grundrelation.

Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen den Punkten dreier geraden Punktreihen, wie er auf den drei Hauptaxen dreier projectiv-trilinearer ebenen Systeme stattfindet. Derselbe kann folgendermassen formulirt werden (vergl. Fig. 1):

Projicirt man die Punkte einer Ebene aus drei in der Ebene liegenden Projectionscentren O, O', O'' auf drei feste Axen $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$, so sind je drei solche Punkte x, x', x'' auf $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$, welche die Projectionen des nämlichen Punktes X der Ebene vorstellen, einander zugeordnet.

Aus früheren Artikeln mag zunächst erinnert werden: Von den sechs ***Kernpunkten*** p, q, p', q', p'', q'', in welchen die drei Axen von den drei Verbindungslinien der Projectionscentren geschnitten werden, bezeichnen wir je zwei solche, welche die Projectionen eines und desselben Projectionscentrums vorstellen (also p und q', p' und q'', p'' und q), als ***correspondirende*** Kernpunkte, — ferner je zwei solche, von denen jeder die Projection des der Axe des andern zugehörigen Projectionscentrums vorstellt (also p' und q, p'' und q', p und q''), als ***gegnerische*** Kernpunkte. Fällt von einem Tripel zugeordneter Punkte einer in einen Kernpunkt, so muss stets ein zweiter ebenfalls in einen Kernpunkt fallen, und zwar entweder in den correspondirenden oder in den gegnerischen; der dritte zugeordnete Punkt wird unbestimmt. (Vergl. I. Art. § 3 *)).

Auf je zwei Axen, z. B. $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$, bilden immer diejenigen Punkte x' und x'', welche zu einem und demselben Punkt x der dritten Axe zugeordnet sein können, zwei projectivische Punktreihen. In den letzteren

*) S. dieses Journal, Bd. 95, S. 13.

stellen die correspondirenden Kernpunkte und die gegnerischen Kernpunkte je ein Paar entsprechender Punkte vor. — Sind die zwei Punkte x' und x'' dem Punkte x zugeordnet, so sind es auch die zwei Punkte y' und y'', welche bezw. den Punkten x' und x'' harmonisch conjugirt sind in Beziehung auf die zugehörigen zwei Kernpunkte p' und q', bezw. p'' und q''.

Um nun eine Beziehung zwischen den Abständen dreier zugeordneter Punkte von den zugehörigen Kernpunkten zu erhalten, bemerken wir, dass in dem Dreieck $OO'O''$ (Fig. 1) das Dreiseitsverhältniss der drei Strahlen Ox, $O'x'$, $O''x''$, weil sie sich in einem Punkte schneiden, den Werth 1 hat*). Es ist also:

$$(1.)\qquad \frac{\sin(Op, Ox)}{\sin(Ox, Oq)}\,\frac{\sin(O'p', O'x')}{\sin(O'x', O'q')}\,\frac{\sin(O''p'', O''x'')}{\sin(O''x'', O''q'')} = 1,$$

woraus durch Anwendung des Sinussatzes auf die Dreiecke Opx und Oxq, $O'p'x'$ und $O'x'q'$, u. s. w. sich ergiebt:

$$\frac{Oq}{Op}\,\frac{O'q'}{O'p'}\,\frac{O''q''}{O''p''}\cdot\frac{px}{xq}\,\frac{p'x'}{x'q'}\,\frac{p''x''}{x''q''} = 1$$

oder:

$$(2.)\qquad \frac{px}{xq}\,\frac{p'x'}{x'q'}\,\frac{p''x''}{x''q''} = C,$$

wo die Constante C den Werth hat:

$$(3.)\qquad C = \frac{Op}{Oq}\,\frac{O'p'}{O'q'}\,\frac{O''p''}{O''q''}.$$

Hat man zwei Tripel zugeordneter Punkte x, x', x'' und y, y', y'', und stellt für beide die Relation (2.) auf, so erhält man durch Division die *Doppelverhältnissrelation:*

$$(4.)\qquad (pqxy)(p'q'x'y')(p''q''x''y'') = 1.$$

Die Relation (2.) bezw. (4.) ist nun von Herrn *Schubert* als die Fundamentalrelation des (durch die blosse Bedingung der eindeutigen algebraischen Zuordnung definirten) allgemeinsten Falles der trilinearen Verwandtschaft zwischen drei Punktreihen nachgewiesen worden. Damit ist also der Beweis erbracht, dass durch Projection eines ebenen Punktsystems auf drei in seiner Ebene liegende feste Axen aus drei festen Centren —

*) Vergl. *Chasles*, Traité de Géométrie supérieure, No. 365. Wir benützen jedoch im folgenden stets die *Möbius*sche Schreibweise des Verhältnisses und reguliren danach die Vorzeichen.

auf den Axen drei trilineare Punktreihen der allgemeinsten Art erzeugt werden. Es kann daher diese Erzeugungsweise als Definition für die allgemeine trilineare Beziehung zwischen drei Punktreihen aufgestellt werden.

Es ist von Interesse, wahrzunehmen, wie die Grundrelation (2.) als Ausfluss der Fundamentalconstruction der projectiv-trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme aufgefasst werden kann. Es ist nämlich in Fig. 2, welche diese Fundamentalconstruction veranschaulicht (vergl. I. Art., § 3*)), das von den sechs Kernstrahlen gebildete Polygon $g_{20}xg_{01}x'g_{12}x''$ ein windschiefes Sechseck, welches zufolge des Satzes von *Carnot***) von der Ebene der drei Hauptaxen in den Punkten p, q, p', q', p'', q'' nach dem Sechsseckschnittverhältniss +1 geschnitten wird. Es ist also:

$$\frac{g_{20}p}{px}\cdot\frac{xq}{qg_{01}}\cdot\frac{g_{01}p'}{p'x'}\cdot\frac{x'q'}{q'g_{12}}\cdot\frac{g_{12}p''}{p''x''}\cdot\frac{x''q''}{q''g_{20}} = 1,$$

oder:

$$(5.)\qquad \frac{px}{xq}\cdot\frac{p'x'}{x'q'}\cdot\frac{p''x''}{x''q''} = \frac{g_{20}p}{qg_{01}}\cdot\frac{g_{01}p'}{q'g_{12}}\cdot\frac{g_{12}p''}{q''g_{20}}.$$

Fallen nun die Punkte x, x', x'' in die Hauptaxen, so geht Gleichung (5.) über in:

$$\frac{px}{xq}\cdot\frac{p'x'}{x'q'}\cdot\frac{p''x''}{x''q''} = \frac{m_{20}p}{qm_{01}}\cdot\frac{m_{01}p'}{q'm_{12}}\cdot\frac{m_{12}p''}{q''m_{20}} = C.$$

Dass der letztere Werth der Constanten C mit demjenigen in Gleichung (3.) übereinstimmt, ergiebt sich leicht durch Anwendung des Sinussatzes auf die Dreiecke $qm_{01}p', q'm_{12}p'', q''m_{20}p$ und $pOq, p'O'q', p''O''q''$.

Hinsichtlich der Doppelverhältnissrelation (4.) sei noch bemerkt (vergl. Fig. 1): Sind a, a', a'' die Projectionen eines festen Punktes A, — x, x', x'' die Projectionen eines veränderlichen Punktes X der Ebene, so ist durch die drei Doppelverhältnisse $(pqax)$, $(p'q'a'x')$, $(p''q''a''x'')$, deren Product den constanten Werth 1 hat, die Lage der drei Punkte x, x', x'' auf den drei Axen und damit die Lage des Punktes X in der Ebene bestimmt. Man erkennt leicht, dass diese Doppelverhältnisse identisch sind mit den *projectivischen Coordinaten****) des Punktes X in Beziehung auf das Grunddreieck $OO'O''$ und den Einheitspunkt A.

---

*) S. dieses Journal, Bd. 95, S. 10.

**) Vergl. *Carnot,* Essai sur la théorie des transversales (Paris 1806), Théor. 3; dazu betreffs des Vorzeichens: *Möbius,* Barycentr. Calcul, § 199.

***) Vergl. *Fiedler,* Darstellende Geometrie, 3. Aufl., III., § 15.

§ 2.

Die Charakteristik und die Fluchtpunkte.

Wir bezeichnen die Constante C als die ***Charakteristik*** der trilinearen Beziehung. Ihre geometrische Bedeutung ergiebt sich leicht:

In jeder Punktreihe möge derjenige Punkt, welcher den unendlich fernen Punkten der zwei andern Punktreihen zugeordnet ist, der ***Fluchtpunkt*** der betreffenden Reihe genannt werden.

Da in jeder Reihe der unendlich ferne Punkt dem Mittelpunkt der Kernstrecke harmonisch conjugirt ist in Beziehung auf die Kernpunkte, so ist (gemäss der Bemerkung in § 1, Abs. 4) jeder Fluchtpunkt auch den Mittelpunkten der Kernstrecken der zwei andern Reihen zugeordnet.

Fallen nun von drei zugeordneten Punkten x, x', x'' zwei ins Unendliche oder in die Mittelpunkte der betreffenden Kernstrecken, so nehmen in der Grundrelation (2.) zwei Verhältnisse die Werthe -1, bezw. $+1$ an. Bezeichnen wir also die drei Fluchtpunkte durch u, v', w'', so ergiebt sich:

$$C = \frac{pu}{uq} = \frac{p'v'}{v'q'} = \frac{p''w''}{w''q''}. \tag{6.}$$

In Worten: ***Die drei Kernstrecken werden in den Fluchtpunkten in dem nämlichen Verhältniss getheilt, dessen Werth gleich der Charakteristik ist.***

Die Construction der Fluchtpunkte, sei es vermittelst der unendlich fernen Punkte oder der Mittelpunkte der Kernstrecken je zweier Punktreihen, bietet keine Schwierigkeit. Fig. 3 veranschaulicht die bezüglichen bemerkenswerthen Verhältnisse.

Es sei noch erwähnt, dass in drei projectiv-trilinearen ebenen Systemen die Hauptaxen von den (schon im II. Artikel, § 2 *) besprochenen) ***Fluchtlinien*** in den Fluchtpunkten der Hauptaxen geschnitten werden.

§ 3.

Specielle Fälle.

1. Hat die Charakteristik den besonderen Werth

$$C = +1,$$

so sind die Mittelpunkte der drei Kernstrecken einander zugeordnet, und es bilden je ein Mittelpunkt und zwei unendlich ferne Punkte ein Tripel zugeordneter Punkte. Die Fluchtpunkte fallen in die Mittelpunkte. Es ist

*) S. dieses Journal, Bd. 97, S. 266.

eine besondere Eigenthümlichkeit dieses und nur dieses Falles, dass die endlichen Fluchtpunkte unter sich wieder ein Tripel zugeordneter Punkte bilden.

Auf diesen Specialfall führt u. a. der Satz des Ceva, das heisst: er entsteht, wenn die drei Projectionscentren in die Schnittpunkte der drei Axen verlegt werden (vergl. Fig. 4). In dieselben Punkte fallen dann auch je zwei correspondirende Kernpunkte zusammen. Wir kennzeichnen daher diesen Specialfall kurz als *Ceva-Beziehung.*

2. Hat die Charakteristik den besonderen Werth

$$C = -1,$$

so sind die unendlich fernen Punkte der drei Punktreihen einander zugeordnet, und es bilden je ein unendlich ferner Punkt und zwei Mittelpunkte ein Tripel zugeordneter Punkte. Die Fluchtpunkte fallen ins Unendliche.

Es ist dies derjenige Specialfall, auf welchen bei der Erzeugung durch Schnitt der Satz des Menelaos führt, und welchen Herr *Schubert* mit der Bezeichnung „geradlinigte Beziehung" zum Ausgangspunkt seiner Untersuchungen gewählt hat. Daher mag dieser Specialfall kurz als *Menelaos-Beziehung* gekennzeichnet werden.

Bei der Erzeugung durch Projection erhält man denselben, wenn die drei Axen parallel zu den nach irgend einem Punkt U gehenden Strahlen OU, $O'U$, $O''U$ sind, also insbesondere —, wenn die drei Axen unter sich parallel sind.

§ 4.

Construction trilinearer Punktreihen.

Aus der Grundrelation (2.) folgt:

Die trilineare Beziehung zwischen drei Punktreihen ist bestimmt, wenn die sechs Kernpunkte und die Charakteristik gegeben sind.

Da sich aber aus Gleichung (2.) umgekehrt der Werth der Charakteristik ergiebt, sobald ein Tripel zugeordneter Punkte bekannt ist, so gilt ferner:

Die trilineare Beziehung zwischen drei Punktreihen ist bestimmt, wenn die sechs Kernpunkte und ein Tripel zugeordneter Punkte gegeben sind.

Wir haben im vorangehenden drei trilineare Punktreihen stets ***in orientirter Lage*** in einer Ebene betrachtet, das heisst in solcher Lage, wo

sie die directen Projectionen des in ihrer Ebene enthaltenen Punktsystems vorstellen. Diese orientirte Lage spielt für die trilineare Verwandtschaft die nämliche wichtige Rolle wie die perspectivische Lage für die projectivische Verwandtschaft.

Um zu prüfen, ob drei trilineare Punktreihen in einer Ebene sich in orientirter Lage befinden, genügt die Untersuchung eines einzigen Tripels zugeordneter Punkte x, x', x'': Man bringt (vergl. Fig. 1) die drei Verbindungslinien je zweier gegnerischer Kernpunkte $q''p$, qp', $q'p''$ zum Schnitt in O, O', O'' und zieht die Strahlen Ox, $O'x'$, $O''x''$. Schneiden sich diese in einem Punkte, so findet das nämliche für jedes andere Tripel zugeordneter Punkte statt, das heisst: die drei Punktreihen liegen orientirt. (Denn ist y, y', y'' irgend ein anderes Tripel, so ziehe man die Strahlen $O'y'$ und $O''y''$, welche sich in Y schneiden; schneidet dann der Strahl OY die Axe pq in η, so ergiebt sich aus der Grundrelation:

$$\frac{p\eta}{\eta q}\,\frac{p'y'}{y'q'}\,\frac{p''y''}{y''q''} = \frac{py}{yq}\,\frac{p'y'}{y'q'}\,\frac{p''y''}{y''q''},$$

woraus folgt, dass η mit y zusammenfallen muss.)

Sind drei trilineare Punktreihen $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$ durch die sechs Kernpunkte und ein Tripel zugeordneter Punkte x, x', x'' oder durch die sechs Kernpunkte und die Charakteristik gegeben, so kann die Aufgabe, weitere Tripel zugeordneter Punkte zu construiren, dadurch gelöst werden, dass man die drei Punktreihen in orientirte Lage bringt. Dies ist auf mannigfaltige Weise ausführbar. Man kann z. B. (vergl. Fig. 1) die vier Punkte O, O', O'' und X ganz beliebig festsetzen und dann die drei Punktreihen so in die bezüglichen drei Strahlenbüschel O, O', O'' hineinlegen, dass die gegebenen Punkte p, x, q der Reihe $\mathfrak{l}$ bezw. in die Strahlen OO'', OX, OO' zu liegen kommen, ebenso die Punkte p', x', q' der Reihe $\mathfrak{l}'$ in die Strahlen $O'O$, $O'X$, $O'O''$, u. s. w.

Ist statt des Tripels x, x', x'' die Charakteristik C gegeben, so bestimmt man zunächst in einer Punktreihe, z. B. $\mathfrak{l}$, den Fluchtpunkt u so, dass $\frac{pu}{uq} = C$ ist, und verfährt im übrigen wie oben, indem man an Stelle der Punkte x, x', x'' den Punkt u nebst den unendlich fernen Punkten oder den Mittelpunkten der Kernstrecken der zwei andern Reihen benützt.

Die einfachste orientirte Lage ist diejenige, bei welcher die drei Punktreihen sich in einem Punkte so schneiden, dass die drei gegebenen

zugeordneten Punkte im Schnittpunkt zusammenfallen. Durch Verbinden von je zwei gegnerischen Kernpunkten ergeben sich dann die drei Projectionscentren.

Drei trilineare Punktreihen, deren Charakteristik $= +1$ ist, können stets in die durch Fig. 4 verbildlichte orientirte Lage gebracht werden.

Drei trilineare Punktreihen, deren Charakteristik $= -1$ ist, sind in jeder parallelen Lage orientirt.

Aus der Doppelverhältnissrelation (4.) folgt:

Drei Punktreihen, welche zu drei trilinearen Punktreihen einzeln projectivisch sind, sind unter sich ebenfalls trilinear.

Diese Bemerkung kann zur Construction trilinearer Punktreihen bei nicht orientirter Lage benützt werden.

Liegen z. B. drei trilineare Punktreihen $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$, welche durch die sechs Kernpunkte und ein Tripel zugeordneter Punkte a, a', a'' gegeben sind, beliebig in einer Ebene (vergl. Fig. 5), so ziehe man die Verbindungslinien je zweier gegnerischer Kernpunkte und bringe dieselben in O, O', O'' zum Schnitt. Zieht man dann die Strahlen $O'a'$ und $O''a''$, welche sich in A schneiden, so wird bei der vorausgesetzten nicht orientirten Lage der Strahl OA nicht durch den Punkt a gehen. Man lege nun durch q eine beliebige Gerade λ, welche von den Strahlen OA und Op in α und π geschnitten wird. Betrachtet man dann die trilineare Beziehung zwischen den drei Punktreihen λ, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$, welche durch die sechs Kernpunkte π, q, p', q', p'', q'' und das Punktetripel α, a', a'' bestimmt ist, so befinden sich diese drei Reihen in orientirter Lage. Zieht man ferner $a\alpha$, welche $p\pi$ in C schneidet, so liegen die Punktreihen λ und $\mathfrak{l}$ perspectivisch in Beziehung auf C als Projectionscentrum. Man erhält daher ein beliebiges weiteres Tripel zugeordneter Punkte x, x', x'' dadurch, dass man x' und x'' beliebig wählt, $O'x'$ und $O''x''$ zieht, welche sich in X schneiden, hierauf OX zieht, welche λ in ξ schneidet, endlich $C\xi$ zieht, welche $\mathfrak{l}$ in x schneidet.

Liegen die Axen der drei Punktreihen $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$ windschief im Raum, so kann die Construction ebenfalls durch Vermittlung dreier Hülfspunktreihen λ, λ', λ'' geschehen, welche zu einander trilinear in orientirter Lage sind, und von welchen jede zu einer der gegebenen Punktreihen $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$ perspectivisch ist.

Man kann z. B. (vergl. Fig. 6) die Verbindungslinien pp', $p'p''$, $p''p$

als Axen der Hülfspunktreihen λ, λ', λ'' benützen und deren Punkte zu einander in die ***Ceva-Beziehung*** (vergl. §. 3, 1) setzen. Zieht man nach einem beliebigen Punkt A der Ebene $pp'p''$ die Strahlen $p''A$, pA, $p'A$, welche λ, λ', λ'' bezw. schneiden in α, α', α'', so ist α, α', α'' ein Tripel zugeordneter Punkte der drei Hülfspunktreihen. Ordnet man nun die drei Punkte p, α, p' von λ bezw. den Punkten p, a, q von $\mathfrak{l}$ projectivisch zu, so liegen λ und $\mathfrak{l}$ perspectivisch, da sie den Punkt p entsprechend gemein haben. Das zugehörige Projectionscentrum C ergiebt sich als Schnittpunkt der Strahlen $p'q$ und αa. In analoger Weise findet man die Projectionscentren C' und C'' für die Punktreihen λ' und $\mathfrak{l}'$, λ'' und $\mathfrak{l}''$. — Um nun zu zwei Punkten x' und x'' auf $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ den dritten zugeordneten Punkt x auf $\mathfrak{l}$ zu bestimmen, zieht man $C'x'$ und $C''x''$, welche λ' und λ'' schneiden in ξ' und ξ'', zieht hierauf $p\xi'$ und $p'\xi''$, welche sich in Ξ schneiden, ferner $p''\Xi$, welche λ in ξ schneidet. Zieht man schliesslich $C\xi$, welche $\mathfrak{l}$ in x schneidet, so ist x der gesuchte, den Punkten x' und x'' zugeordnete Punkt der Punktreihe $\mathfrak{l}$.

Mittelst Projicirens dreier orientirt liegender trilinearer Hülfspunktreihen erfolgt auch die Construction von trilinearen Punktreihen, die auf dem nämlichen Träger liegen. Doch muss die Theorie dreier ***in einander liegender*** trilinearer Grundgebilde einer gesonderten Betrachtung vorbehalten bleiben.

§ 5.

Trilineare Strahlenbüschel und Ebenenbüschel.

Drei trilineare Punktreihen werden aus drei beliebigen Punkten durch drei ***trilineare Strahlenbüschel*** —, aus drei geraden Linien durch drei ***trilineare Ebenenbüschel*** projicirt, wobei sich die projectivischen Eigenschaften der trilinearen Verwandtschaft von den Punktreihen auf die Strahlen- oder Ebenenbüschel übertragen. Allgemein gilt: Drei Grundgebilde erster Stufe, welche zu drei trilinearen Grundgebilden einzeln projectivisch sind, stehen zu einander ebenfalls in trilinearer Beziehung.

Die Grundrelationen (2.) und (4.) übertragen sich auf trilineare Strahlenbüschel und Ebenenbüschel in der Art, dass an Stelle der Strecken px, xq, $p'x'$, u. s. f. die Sinusse der Winkelabstände der Strahlen von den bezüglichen ***Kernstrahlen*** — bezw. der Ebenen von den bezüglichen ***Kernebenen*** — treten.

Projicirt man drei trilineare Punktreihen $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$ aus drei Centren o, o', o'' und bezeichnet die Strahlen, welche die Punkte p, q, x, u. s. f. projiciren, und deren positive Richtungen op, oq, ox u. s. f. seien, durch die entsprechenden deutschen Buchstaben, so hat man z. B. für das Strahlenbüschel o (vergl. Fig. 7):

$$px = op\frac{\sin(\mathfrak{p},\mathfrak{x})}{\sin(\mathfrak{x},px)}, \quad xq = oq\frac{\sin(\mathfrak{x},\mathfrak{q})}{\sin(\mathfrak{x},xq)},$$

woraus folgt:

$$\frac{px}{xq} = \frac{op}{oq}\frac{\sin(\mathfrak{p},\mathfrak{x})}{\sin(\mathfrak{x},\mathfrak{q})}.$$

Stellt man die entsprechenden Gleichungen für die Strahlenbüschel o' und o'' auf, so ergiebt sich durch Multiplication:

$$\frac{px}{xq}\frac{p'x'}{x'q'}\frac{p''x''}{x''q''} = \frac{op}{oq}\frac{o'p'}{o'q'}\frac{o''p''}{o''q''}\frac{\sin(\mathfrak{p},\mathfrak{x})}{\sin(\mathfrak{x},\mathfrak{q})}\frac{\sin(\mathfrak{p}',\mathfrak{x}')}{\sin(\mathfrak{x}',\mathfrak{q}')}\frac{\sin(\mathfrak{p}'',\mathfrak{x}'')}{\sin(\mathfrak{x}'',\mathfrak{q}'')} = C$$

oder:

$$(7.)\qquad \frac{\sin(\mathfrak{p},\mathfrak{x})}{\sin(\mathfrak{x},\mathfrak{q})}\frac{\sin(\mathfrak{p}',\mathfrak{x}')}{\sin(\mathfrak{x}',\mathfrak{q}')}\frac{\sin(\mathfrak{p}'',\mathfrak{x}'')}{\sin(\mathfrak{x}'',\mathfrak{q}'')} = \mathfrak{C},$$

wo

$$(8^a.)\qquad \mathfrak{C} = \frac{C}{\frac{op}{oq}\frac{o'p'}{o'q'}\frac{o''p''}{o''q''}}.$$

Der in dieser Relation ausgedrückte Zusammenhang zwischen den zwei Charakteristiken $\mathfrak{C}$ und C findet ganz allgemein bei jedem Uebergang von drei trilinearen Grundgebilden zu drei anderen mittelst Projection oder Schnitt statt. Er kann in folgenden Satz formulirt werden:

Geht man von drei trilinearen einstufigen Grundgebilden zu drei neuen vermittelst Projection oder Schnitt über, so findet man die Charakteristik der neuen trilinearen Beziehung, indem man das Tripelverhältniss der Entfernungsmasse der drei neuen Träger von den zugehörigen alten Kernelementen bildet und die alte Charakteristik durch dieses Tripelverhältniss dividirt.

Dabei ist unter *„Entfernungsmass"* zu verstehen: der Streckenabstand zweier Punkte oder eines Punktes von einer Geraden, oder der Sinus des Winkelabstandes zweier Geraden oder einer Geraden von einer Ebene.

Geht man z. B. umgekehrt von den trilinearen Strahlenbüscheln o, o', o'' vermittelst Schnitt über zu den Punktreihen $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$, so sind die Geraden $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$ die neuen Träger, und die Strahlen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{q}''$ die

alten Kernelemente. Das Tripelverhältniss der Entfernungsmasse ist also

$$= \frac{\sin(\mathfrak{l}, \mathfrak{p})}{\sin(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})} \frac{\sin(\mathfrak{l}', \mathfrak{p}')}{\sin(\mathfrak{l}', \mathfrak{q}')} \frac{\sin(\mathfrak{l}'', \mathfrak{p}'')}{\sin(\mathfrak{l}'', \mathfrak{q}'')},$$

und man hat:

$$(8^b.) \qquad C = \frac{\mathfrak{C}}{\frac{\sin(\mathfrak{l}, \mathfrak{p})}{\sin(\mathfrak{l}, \mathfrak{q})} \frac{\sin(\mathfrak{l}', \mathfrak{p}')}{\sin(\mathfrak{l}', \mathfrak{q}')} \frac{\sin(\mathfrak{l}'', \mathfrak{p}'')}{\sin(\mathfrak{l}'', \mathfrak{q}'')}},$$

wie sich unmittelbar aus Gleichung (8^a.) ableiten lässt.

Geht man ferner von drei trilinearen Strahlenbüscheln o, o', o'' vermittelst Projection über zu drei Ebenenbüscheln mit den Axen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, so sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ die neuen Träger, und die Strahlen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{q}''$ die alten Kernelemente. Werden die Ebenen, welche die Strahlen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{x}$ u. s. f. projiciren (vergl. Fig. 8), bezw. durch π, $\varkappa$, ξ u. s. f. bezeichnet, so erhält man durch Anwendung des Sinussatzes auf die Dreikante o, $\mathfrak{a}\mathfrak{p}\mathfrak{x}$ und o, $\mathfrak{a}\mathfrak{x}\mathfrak{q}$, u. s. f.:

$$(9^a.) \qquad \Gamma = \frac{\mathfrak{C}}{\frac{\sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{p})}{\sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{q})} \frac{\sin(\mathfrak{a}', \mathfrak{p}')}{\sin(\mathfrak{a}', \mathfrak{q}')} \frac{\sin(\mathfrak{a}'', \mathfrak{p}'')}{\sin(\mathfrak{a}'', \mathfrak{q}'')}}.$$

Bei dem umgekehrten Uebergang von den Ebenenbüscheln zu den Strahlenbüscheln durch Schnitt sind die Ebenen der Strahlenbüschel ε, ε', ε'' die neuen Träger, die Ebenen π, $\varkappa$, π', $\varkappa'$, π'', $\varkappa''$ die alten Kernelemente, und man hat:

$$(9^b.) \qquad \mathfrak{C} = \frac{\Gamma}{\frac{\sin(\varepsilon, \pi)}{\sin(\varepsilon, \varkappa)} \frac{\sin(\varepsilon', \pi')}{\sin(\varepsilon', \varkappa')} \frac{\sin(\varepsilon'', \pi'')}{\sin(\varepsilon'', \varkappa'')}}.$$

Beim Uebergang von Punktreihen zu Ebenenbüscheln kommen die Entfernungen der Kernpunkte der Punktreihen von den Axen der Ebenenbüschel —, beim umgekehrten Uebergang von Ebenenbüscheln zu Punktreihen die Winkel, welche die Kernebenen der Ebenenbüschel mit den Axen der Punktreihen bilden, in Betracht. (Zum Beweise des Satzes für diese Fälle nehme man die Vermittlung von beiderseits perspectivischen Strahlenbüscheln zu Hülfe und combinire die zwei Gleichungen (8^a.) und (9^a.), bezw. (8^b.) und (9^b.)

§ 6.

Fortsetzung. Die Fluchtelemente. Construction trilinearer Strahlenbüschel und Ebenenbüschel.

Bei drei trilinearen Strahlenbüscheln und Ebenenbüscheln spielen die Strahlen, bezw. Ebenen, welche die Winkel zwischen den positiven Rich-

tungen je zweier Kernelemente und deren Nebenwinkel halbiren, eine ähnliche Rolle wie bei den trilinearen Punktreihen die Mittelpunkte der Kernstrecken und die unendlich fernen Punkte.

Durch die Gleichungen:

$$\frac{\sin(\mathfrak{p},\mathfrak{u})}{\sin(\mathfrak{u},\mathfrak{q})}=\frac{\sin(\mathfrak{p}',\mathfrak{v}')}{\sin(\mathfrak{v}',\mathfrak{q}')}=\frac{\sin(\mathfrak{p}'',\mathfrak{w}'')}{\sin(\mathfrak{w}'',\mathfrak{q}'')}=\mathfrak{C}$$

sind die drei *Fluchtelemente* $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}''$ bestimmt, von denen jedes mit den Halbirungselementen der Kern-Winkel der zwei andern Büschel —, sowie mit den Halbirungselementen der zwei Kern-Nebenwinkel ein Tripel zugeordneter Elemente bildet.

In dem speciellen Fall, wo die Charakteristik den Werth $+1$ hat, bilden die drei Halbirungselemente der Kern-Winkel unter sich, und ferner jedes derselben zusammen mit den Halbirungselementen der Kern-Nebenwinkel der zwei andern Büschel ein Tripel zugeordneter Elemente.

In dieser speciellen Beziehung (*Ceva-Beziehung*) stehen insbesondere drei in einer Ebene liegende Strahlenbüschel, von denen je drei durch den nämlichen Punkt gehende Strahlen einander zugeordnet sind *), vorausgesetzt, dass in jedem Büschel die positiven Richtungen der Kernstrahlen vom Centrum nach den Centren der zwei andern Büschel zielen. Die Summe der drei Kernwinkel beträgt in diesem Fall zwei Rechte.

Hat die Charakteristik den Werth -1, so bilden die Halbirungselemente der drei Kern-Nebenwinkel unter sich, und ferner jedes derselben zusammen mit den Halbirungselementen der Kern-Winkel der zwei andern Büschel ein Tripel zugeordneter Elemente. Insbesondere stehen in dieser speciellen Beziehung (*Menelaos-Beziehung*) drei in einer Ebene liegende Strahlenbüschel, die so auf einander bezogen sind, dass je drei Strahlen, deren Schnittpunkte mit den Verbindungslinien der drei Centren in gerader Linie liegen, einander zugeordnet sind **) (unter der nämlichen Voraussetzung wie oben betreffs der positiven Richtungen der Kernstrahlen). Auch hier beträgt die Summe der drei Kernwinkel zwei Rechte.

Die Construction dreier in einer Ebene liegender allgemein-trilinearer Strahlenbüschel o, o', o'', welche durch die Kernstrahlen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}'$,

---

*) Vergl. *Chasles,* Traité de Géom. supér., Nr. 365 (unter Berücksichtigung der Fussnote auf S. 27 in Betreff des Vorzeichens).

**) Vergl. *Chasles,* Traité de Géom. supér., Nr. 363 (unter Berücksichtigung der Fussnote auf S. 27).

$\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{q}''$ nebst einem Tripel zugeordneter Strahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ gegeben sind, kann durch Vermittlung dreier Hülfsstrahlenbüschel ω, ω', ω'' erfolgen, welche unter sich in der *Ceva-Beziehung* stehen, und von denen jedes zu einem der gegebenen Strahlenbüschel o, o', o'' perspectivisch ist. Man kann z. B. (vergl. Fig. 9) die Schnittpunkte von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{p}$ als Hülfscentren ω, ω', ω'' benützen. Zieht man dann nach einem beliebigen Punkt A die Strahlen ωA, $\omega' A$, $\omega'' A$, so stellen diese ein Tripel zugeordneter Strahlen der Hülfsstrahlenbüschel vor. Ordnet man nun die drei Strahlen $\omega\omega''$, $\omega\omega'$, ωA des Büschels ω bezw. den Strahlen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{a}$ des Büschels o projectivisch zu, so liegen beide Büschel perspectivisch, da sie das erste Strahlenpaar entsprechend gemein haben. Die zugehörige Perspectivitätsaxe ergiebt sich als Verbindungslinie der Schnittpunkte $\varkappa$ und α der zwei andern Strahlenpaare. In analoger Weise findet man die Perspectivitätsaxen $\varkappa'\alpha'$ und $\varkappa''\alpha''$ für die zwei Strahlenbüschel ω' und o', bezw. ω'' und o''. — Um nun beliebige weitere Tripel zugeordneter Strahlen der Büschel o, o', o'' zu bestimmen, zieht man nach einem beliebigen Punkt X Strahlen von ω, ω', ω'', markirt deren Schnittpunkte mit den bezüglichen Perspectivitätsaxen und zieht nach ihnen Strahlen von o, o', o''.

Die Uebertragung der besprochenen Constructionen auf Ebenenbüschel bietet keine Schwierigkeit.

§ 7.

Die einzelkernig-trilineare Beziehung.

Eine besondere Gattung der trilinearen Beziehung dreier Punktreihen wird dadurch bedingt, dass bei orientirter Lage die drei Projectionscentren O, O', O'' in gerader Linie liegen (vergl. Fig. 10*a*). Es fallen alsdann in jeder Punktreihe die zwei Kernpunkte in einen einzigen Punkt zusammen, welcher durch den Schnitt der betreffenden Punktreihe mit der Geraden $OO'O''$ bestimmt ist. Wir bezeichnen daher diese Gattung als *einzelkernig-trilineare* Beziehung im Gegensatz zu der allgemeinen oder *doppelkernig-trilinearen* Beziehung.

Herr *Schubert* hat bereits auf diesen Specialfall unter der Bezeichnung „Ausartung η“ hingewiesen *).

Die drei Kernpunkte p, p', p'' stellen wieder singuläre Punkte vor

*) S. a. a. O. § 7.

von der Eigenschaft, dass, wenn von einem Tripel zugeordneter Punkte einer in einen Kernpunkt fällt, stets ein zweiter ebenfalls in einen Kernpunkt fallen muss, während der dritte zugeordnete Punkt unbestimmt wird. Denn fällt z. B. x nach p (vergl. Fig. 10a), so muss der Punkt X, dessen drei Projectionen x, x', x'' vorstellen, in der Geraden $OO'O''$ liegen. Im allgemeinen wird dann x' nach p', x'' nach p'' fallen. Wird aber X speciell in O'' angenommen, so fällt x' nach p' und wird x'' unbestimmt.

Denjenigen Punkt jeder Punktreihe, welcher den unendlich fernen Punkten der zwei andern Punktreihen zugeordnet ist, nennen wir wieder den ***Fluchtpunkt*** der betreffenden Reihe und bezeichnen die drei Fluchtpunkte wieder durch u, v', w''.

Um die Grundrelation der einzelkernig-trilinearen Verwandtschaft aufzustellen, liegt es nahe, in jeder Punktreihe den Kernpunkt und den Fluchtpunkt als Grundpunkte zu benützen. Da man jedoch bei Verwendung der Fluchtpunkte die Grundrelation zunächst nicht in projectivischer Form erhalten würde, und da sich die betreffende Relation nicht auf den Specialfall erstrecken würde, wo die drei unendlich fernen Punkte einander zugeordnet sind, so benützen wir statt der drei unendlich fernen Punkte und der drei Fluchtpunkte besser sechs Punkte von allgemeiner Lage, die aber unter einander in dem nämlichen Zusammenhang stehen wie jene.

Die drei unendlich fernen Punkte und die drei Fluchtpunkte bilden zusammen drei Tripel zugeordneter Punkte. Sechs in dieser Art unter einander verbundene Punkte wollen wir allgemein ein ***Sextupel zugeordneter Punkte*** nennen. Ein solches besteht aus 3 ***Hauptpunkten***, von welchen in jeder Punktreihe einer beliebig angenommen werden kann, und den 3 ***Nebenpunkten***, welche aus den drei Hauptpunkten dadurch hervorgehen, dass jeder mit zwei Hauptpunkten ein Tripel zugeordneter Punkte bildet. Bei orientirter Lage der drei Punktreihen stellen die sechs Punkte des Sextupels die Projectionen von drei Punkten S_1, S_2, S_3 vor (vergl. Fig. 10a), und es mögen nun die sechs Sextupelpunkte so bezeichnet werden, dass jeder denselben Index erhält wie der Punkt der Ebene, von welchem er eine Projection repräsentirt. Demgemäss seien die drei Hauptpunkte: s_{12}, s'_{23}, s''_{31}, die drei Nebenpunkte: s_3, s'_1, s''_2. Es bilden dann je drei solche Punkte, welche denselben Index, aber verschiedene Accente tragen (also: $s_{12}s'_1s''_{31}$, $s_{12}s'_{23}s''_2$, $s_3s'_{23}s''_{31}$), ein Tripel zugeordneter Punkte.

Es sei nun x, x', x'' ein beliebiges Tripel zugeordneter Punkte.

Wir suchen eine Beziehung zwischen den drei Kernpunkten, den sechs Punkten des Sextupels und den drei Punkten des Tripels x, x', x''.

Zu diesem Zwecke betrachten wir eine zu der ebenen Figur 10*a* collineare, in welcher die der Linie $OO'O''$ entsprechende Gerade ins Unendliche fällt. Diese collinear verwandte Figur ist in Fig. 10*b* dargestellt. Die einzelnen Punkte sind in ihr mit den gleichlautenden griechischen Buchstaben bezeichnet. Sie giebt dieselben Verhältnisse, welche Fig. 10*a* für die *centralprojectiv*-trilineare Beziehung veranschaulicht, für die *parallelprojectiv*-trilineare Beziehung wieder. In der letzteren fallen die Kernpunkte ins Unendliche.

Da nun je zwei entsprechende Doppelverhältnisse in beiden Figuren gleich sind, so hat man:

$$(10.)\qquad \begin{cases} (ps_{12}s_3x) = (\infty\sigma_{12}\sigma_3\xi) = \dfrac{\xi\sigma_{12}}{\sigma_3\sigma_{12}} = \dfrac{\sigma_{12}\xi}{\sigma_{12}\sigma_3}, \\ (p's'_{23}s'_1x') = \dfrac{\sigma'_{23}\xi'}{\sigma'_{23}\sigma'_1}, \\ (p''s''_{31}s''_2x'') = \dfrac{\sigma''_{31}\xi''}{\sigma''_{31}\sigma''_2}. \end{cases}$$

Bezeichnet man in Fig. 10*b* den Schnittpunkt von $\xi\Xi$ mit $\Sigma_1\Sigma_3$ durch η, — von $\xi'\Xi$ mit $\Sigma_1\Sigma_3$ durch η', — von $\xi''\Xi$ mit $\Sigma_3\Sigma_2$ durch η'', zieht man ferner $\eta''\zeta''$ parallel $\Xi\eta$ und bemerkt, dass dann $\zeta''\Sigma_3 = \eta\eta'$ ist, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{12}\xi}{\sigma_{12}\sigma_3} + \frac{\sigma'_{23}\xi'}{\sigma'_{23}\sigma'_1} + \frac{\sigma''_{31}\xi''}{\sigma''_{31}\sigma''_2} &= \frac{\Sigma_1\eta}{\Sigma_1\Sigma_3} + \frac{\Sigma_3\eta'}{\Sigma_3\Sigma_1} + \frac{\Sigma_3\eta''}{\Sigma_3\Sigma_2} \\ &= \frac{\Sigma_1\eta}{\Sigma_1\Sigma_3} + \frac{\eta'\Sigma_3}{\Sigma_1\Sigma_3} + \frac{\Sigma_3\zeta''}{\Sigma_3\Sigma_1} = \frac{\Sigma_1\Sigma_3}{\Sigma_1\Sigma_3}, \end{aligned}$$

oder

$$(11.)\qquad \frac{\sigma_{12}\xi}{\sigma_{12}\sigma_3} + \frac{\sigma'_{23}\xi'}{\sigma'_{23}\sigma'_1} + \frac{\sigma''_{31}\xi''}{\sigma''_{31}\sigma''_2} = 1.$$

Dies ist die Grundrelation für die *parallelprojectiv-trilineare* Beziehung dreier Punktreihen.

Aus ihr ergiebt sich vermöge der Gleichungen (10.) die Grundrelation für die allgemeine *einzelkernig-trilineare* Beziehung:

$$(12.)\qquad (ps_{12}s_3x)+(p's'_{23}s'_1x')+(p''s''_{31}s''_2x'') = 1.$$

Aus dieser Gleichung folgt zunächst, dass drei Punktreihen, welche zu drei einzelkernig-trilinearen Punktreihen einzeln projectivisch sind, unter

sich ebenfalls in einzelkernig-trilinearer Beziehung stehen. Dagegen kann man von doppelkernig-trilinearen Punktreihen zu einzelkernigen oder umgekehrt nicht durch projectivische Transformation gelangen.

Gleichung (12.) vereinfacht sich wesentlich, wenn man als Hauptpunkte s_{12}, s'_{23}, s''_{31} des Sextupels die unendlich fernen Punkte der drei Punktreihen wählt; die Nebenpunkte s_3, s'_1, s''_2 fallen dann in die Fluchtpunkte u, v', w'', und die Gleichung (12.) geht über in die folgende ***Fluchtpunktrelation*** der einzelkernig-trilinearen Beziehung:

$$(13.)\qquad \frac{pu}{px}+\frac{p'v'}{p'x'}+\frac{p''w''}{p''x''} = 1.$$

Diese Umformung ist jedoch nicht mehr angängig in dem Specialfall, wo die unendlich fernen Punkte der drei Punktreihen einander zugeordnet sind, also die Fluchtpunkte ins Unendliche fallen. Dies findet statt, wenn die Axen der drei Punktreihen parallel zu den nach irgend einem Punkt U der Ebene gehenden Strahlen OU, $O'U$, $O''U$ sind, also insbesondere, wenn (wie in Fig. 11*)) die Axen unter sich parallel sind.

Um für diesen Specialfall eine mit Gleichung (13.) analoge Form der Grundrelation zu erhalten, wählen wir als Hauptpunkte s_{12}, s'_{23}, s''_{31} bezw. die Punkte ∞, ∞' und einen beliebigen Punkt n''. Die Nebenpunkte s_3 und s'_1 (welche bezw. den Punkten ∞', n'' und ∞, n'' zugeordnet sind) mögen durch l und m' bezeichnet werden; der Nebenpunkt s''_2 (welcher ∞, ∞' zugeordnet ist) wird ∞''. Gleichung (12.) geht alsdann über in die folgende:

$$(p\infty lx)+(p'\infty'm'x')+(p''n''\infty''x'') = 1,$$

woraus sich ergiebt:

$$(14.)\qquad \frac{pl}{px}+\frac{p'm'}{p'x'}-\frac{p''n''}{p''x''} = 0.$$

Diese Relation findet sich in etwas anderer Form, bezogen auf eine der ***Erzeugung durch Schnitt*** entsprechende Figur, schon bei ***Poncelet*** **)**. Wir kennzeichnen daher den vorliegenden Specialfall durch die Bezeichnung ***Poncelet-Beziehung***.

Fig. 11 zeigt die geometrische Bedeutung der drei Grössen pl, $p'm'$,

---

*) Dass in Fig. 11 die Axen senkrecht zu der Centralen $OO'O''$ angenommen sind, ist für die gegenwärtige Betrachtung bedeutungslos.

**) S. Traité des propr. proj. II, 51.

$p''n''$, deren Verhältnisse stets dieselben sind, wie auch der Punkt n'' gewählt werden mag.

Aus der Relation (14.) folgt ferner, dass, wenn x, x', x'' ein Tripel zugeordneter Punkte bilden, auch je drei Punkte, deren Abscissen den Abscissen von x, x', x'' proportionirt sind, einander zugeordnet sind. Drei solche unter sich ähnliche Reihen von zugeordneten Punkten bilden bei orientirter Lage mit parallelen Axen die Projectionen einer zu den Axen parallelen Punktreihe.

§ 8.

Construction einzelkernig-trilinearer Punktreihen.

Aus den Grundrelationen (12.) und (13.) folgt, dass die einzelkernig-trilineare Beziehung zwischen drei Punktreihen bestimmt ist, wenn die drei Kernpunkte und ein Sextupel zugeordneter Punkte —, oder wenn die drei Kernpunkte und die drei Fluchtpunkte gegeben sind. Da ein Sextupel zugeordneter Punkte drei Tripel in sich schliesst, so folgt ferner: Die einzelkernig-trilineare Beziehung ist bestimmt aus den drei Kernpunkten und drei Tripeln zugeordneter Punkte.

Sind bei der letzteren Bestimmungsart $aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$ die drei gegebenen Tripel, so kann die Bestimmung weiterer Tripel zugeordneter Punkte $xx'x''$ dadurch erfolgen, dass man zunächst ein Sextupel ermittelt. Dies geschieht, indem man von den gegebenen Tripelpunkten vier geeignete als Sextupelpunkte wählt, z. B. a, a', b'' als Hauptpunkte s_{12}, s'_{23}, s''_{31}, mit a'' als Nebenpunkt s''_2. Stellt man alsdann die Grundrelation (12.) für die zwei Tripel $bb'b''$ und $cc'c''$ (an Stelle von $xx'x''$) auf, so erhält man zwei Gleichungen zur Bestimmung der noch fehlenden zwei Nebenpunkte s_3 und s'_1.

Auf constructivem Wege erfolgt die Bestimmung beliebiger Tripel zugeordneter Punkte wieder dadurch, dass man die drei Punktreihen in orientirte Lage bringt, was auf mannigfaltige Weise geschehen kann:

Sind die drei Kernpunkte und ein Sextupel gegeben, so können die Punkte S_1, S_2, S_3 sowie die Gerade $OO'O''$ der Fig. 10*a* willkürlich gewählt werden; hierdurch bestimmen sich zunächst die drei Centren O, O', O'', worauf die Punktreihen $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$ so in die drei Strahlenbüschel O, O', O'' hineingelegt werden, dass die in jeder Reihe gegebenen drei Punkte in die ihnen entsprechenden Strahlen zu liegen kommen.

Sind die drei Kernpunkte und drei Tripel zugeordneter Punkte

$aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$ gegeben, so kann man eine Orientirung auf folgende Weise erreichen: Man legt die drei Punktreihen so (vergl. Fig. 12), dass die drei Kernpunkte p, p', p'' in gerader Linie liegen, und ferner, dass z. B. a mit a' und b mit b'' zusammenfällt. Verbindet man nun Punkt $a\,(=a')$ mit a'', und Punkt $b\,(=b'')$ mit b', so schneiden diese Verbindungslinien die Gerade $pp'p''$ bezw. in den Punkten O'' und O'. Zieht man endlich $O'c'$ und $O''c''$, welche sich in C schneiden, und verbindet C mit c, so schneidet die Verbindungslinie die Gerade $pp'p''$ im Punkt O.

Die *Poncelet-Beziehung* ist, wie aus Gleichung (14.) folgt, durch die drei Kernpunkte und zwei Tripel zugeordneter Punkte $aa'a''$ und $bb'b''$ bestimmt. Um bei solcher Bestimmung die drei Punktreihen in orientirte Lage mit parallelen Axen zu bringen, legt man (vergl. Fig. 13) zunächst zwei Punktreihen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ beliebig unter sich parallel und nimmt auf der Verbindungslinie pp' die Centren O und O' willkürlich an. Hierauf zieht man Oa und $O'a'$, die sich in A schneiden, — Ob und $O'b'$, die sich in B schneiden, zieht durch A die Parallele zu $\mathfrak{l}$, welche die Centrale OO' in π schneidet, und bestimmt auf πA einen Punkt β so, dass $\frac{\pi A}{A\beta} = \frac{p''a''}{a''b''}$ ist. Endlich zieht man $B\beta$, welche die Centrale in O'' schneidet, zieht $O''A$, und legt die Punktreihe $\mathfrak{l}''$ parallel zu $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ so in das Strahlenbüschel O'' hinein, dass die drei Punkte p'', a'', b'' bezw. in die Strahlen $O''\pi$, $O''A$, $O''\beta$ fallen.

§ 9.

Einzelkernig-trilineare Strahlenbüschel und Ebenenbüschel.

Drei Grundgebilde erster Stufe, welche zu drei einzelkernig-trilinearen Grundgebilden projectivisch sind, stehen zu einander in einzelkernig-trilinearer Beziehung. Die Grundrelation (12.) überträgt sich auf einzelkernig-trilineare Strahlenbüschel und Ebenenbüschel in der Art, dass an Stelle der Doppelverhältnisse die Sinusdoppelverhältnisse zwischen den entsprechenden Strahlen, bezw. Ebenen treten.

Wählt man als Hauptelemente des Sextupels diejenigen Strahlen, bezw. Ebenen, welche zu den Kernelementen rechtwinklig sind, und bezeichnet die Elemente, welche je zweien derselben zugeordnet sind, durch $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}''$, so vereinfacht sich die Grundrelation zu der folgenden:

$$(15.)\qquad \frac{\operatorname{tg}(\mathfrak{p},\mathfrak{u})}{\operatorname{tg}(\mathfrak{p},\mathfrak{x})} + \frac{\operatorname{tg}(\mathfrak{p}',\mathfrak{v}')}{\operatorname{tg}(\mathfrak{p}',\mathfrak{x}')} + \frac{\operatorname{tg}(\mathfrak{p}'',\mathfrak{w}'')}{\operatorname{tg}(\mathfrak{p}'',\mathfrak{x}'')} = 1.$$

In dem Fall, wo die drei rechtwinkligen Elemente einander zugeordnet sind, erhält man für die Grundrelation die Form:

$$(16.)\qquad \frac{\operatorname{tg}(\mathfrak{p},\mathfrak{l})}{\operatorname{tg}(\mathfrak{p},\mathfrak{r})}+\frac{\operatorname{tg}(\mathfrak{p}',\mathfrak{m}')}{\operatorname{tg}(\mathfrak{p}',\mathfrak{r}')}-\frac{\operatorname{tg}(\mathfrak{p}'',\mathfrak{n}'')}{\operatorname{tg}(\mathfrak{p}'',\mathfrak{r}'')} = 0,$$

wo die Bedeutung der drei Elemente $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}''$ derjenigen der drei Punkte l, m', n'' in Gleichung (14.) des § 7 analog ist.

In dieser speciellen einzelkernig-trilinearen Beziehung (*Poncelet-Beziehung*) stehen insbesondere drei in einer Ebene liegende Strahlenbüschel, deren Centren in gerader Linie liegen, und von deren Strahlen je drei durch einen Punkt gehende einander zugeordnet sind. In Fig. 11 repräsentiren O, O', O'' drei solche Strahlenbüschel: die Kernstrahlen fallen mit der Linie $OO'O''$ zusammen, die rechtwinkligen Strahlen werden durch OS_1, $O'S_3$, $O''S_2$, die Strahlen $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}''$ bezw. durch Ol, $O'm'$, $O''n''$ vorgestellt. Gleichung (16.) kann auch auf die Form gebracht werden:

$$(17.)\qquad \frac{O'O''}{\operatorname{tg}(\mathfrak{p},\mathfrak{r})}+\frac{O''O}{\operatorname{tg}(\mathfrak{p}',\mathfrak{r}')}+\frac{OO'}{\operatorname{tg}(\mathfrak{p}'',\mathfrak{r}'')} = 0.$$

§ 10.

Die Sextupelrelation und Fluchtpunktrelation für die doppelkernig-trilineare Beziehung.

Die in § 7 direct abgeleiteten Grundrelationen (12.) und (13.) der einzelkernig-trilinearen Beziehung lassen sich auch aus der Grundrelation (2.) der doppelkernigen Beziehung durch Specialisirung herleiten. Es existiren nämlich zu den Relationen (12.) und (13.) auch für die doppelkernige Beziehung Analoga, welche freilich nicht symmetrisch gebaut und daher von geringerer Tragweite sind. Sie ergeben sich aus der Grundrelation (2.) auf folgende Weise:

Gleichung (2.) kann zunächst in der Form geschrieben werden:

$$px.p'x'.(p''q''+q''x'') = C(xp+pq)(x'p'+p'q')x''q''$$

oder:

$$(18.)\qquad \left(\frac{pq}{px}-1\right)\left(\frac{p'q'}{p'x'}-1\right)+\frac{1}{C}\left(\frac{p''q''}{q''x''}+1\right) = 0.$$

Nun folgt aus Gleichung (6.):

$$\frac{pq}{pu}=\frac{C+1}{C},\quad \frac{p'q'}{p'v'}=\frac{C+1}{C},\quad \frac{p''q''}{q''w''}=-(C+1),$$

woraus:

$$(19.)\qquad \begin{cases} pq = \frac{C+1}{C} pu, \\ p'q' = \frac{C+1}{C} p'v', \\ p''q'' = -(C+1)q''w''. \end{cases}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (18.) ein, so ergiebt sich:

$$(20.)\qquad \frac{pu}{px}+\frac{p'v'}{p'x'}+\frac{q''w''}{q''x''} = \frac{C+1}{C}\,\frac{pu}{px}\,\frac{p'v'}{p'x'}+1.$$

Dies ist nun die zu Gleichung (13.) analoge *Fluchtpunktrelation* für die doppelkernige Verwandtschaft. Die darin vorkommenden drei Kernpunkte p, p', q'' sind solche, welche zusammen ein Tripel zugeordneter Punkte repräsentiren können (ein Kernpunkt, sein gegnerischer und sein correspondirender). Geht die doppelkernige Verwandtschaft in die einzelkernige über, so fallen in jeder Punktreihe die zwei Kernpunkte zusammen; daher wird vermöge der Gleichungen (19.):

$$C = -1,$$

mit welchem Werthe die Relation (20.) in die Form (13.) übergeht.

Ist die doppelkernig-trilineare Beziehung gegeben durch die drei Kernpunkte p, p', q'', die drei Fluchtpunkte u, v', w'' und die Charakteristik C, so bestimmen sich die drei übrigen Kernpunkte aus den Gleichungen (19.).

Aus der Fluchtpunktrelation (20.) ergiebt sich des weiteren vermittelst projectivischer Transformation die (zu Gleichung 12 analoge) *Sextupelrelation* der doppelkernigen Verwandtschaft:

$$(21.)\qquad (ps_{12}s_3x)+(p's'_{23}s'_1x')+(q''s''_{31}s''_2x'') = K(ps_{12}s_3x)(p's'_{23}s'_1x')+1.$$

Hier bedeuten wieder s_{12}, s'_{23}, s''_{31} die Hauptpunkte, s_3, s'_1, s''_2 die Nebenpunkte eines Sextupels zugeordneter Punkte. K ist eine Constante, deren geometrische Bedeutung durch die Beziehung:

$$(22.)\qquad K = (ps_{12}qs_3) = (p's'_{23}q's'_1) = (p''s''_{31}q''s''_2)$$

ausgedrückt ist, welche sich aus den Gleichungen (19.) mittelst projectivischer Transformation ergiebt.

Fallen die zwei Kernpunkte in jeder Punktreihe zusammen, das heisst: geht die doppelkernige Verwandtschaft in die einzelkernige über, so wird $K = 0$, wodurch Gleichung (21.) in die Form (12.) übergeht.

Ist die doppelkernig-trilineare Beziehung gegeben durch die drei

Kernpunkte p, p', q'', ein Sextupel zugeordneter Punkte und die Constante K, so bestimmen sich die drei übrigen Kernpunkte aus den Gleichungen (22.). Um die Charakteristik C zu ermitteln, kann man die Grundrelation (2.) auf drei zugeordnete Punkte des Sextupels, z. B. s_{12}, s'_{23}, s''_2, anwenden, und in der hierdurch erhaltenen Gleichung

$$C = \frac{p s_{12}}{s_{12} q} \frac{p' s'_{23}}{s'_{23} q'} \frac{p'' s''_2}{s''_2 q''}$$

die aus den Gleichungen (22.) bestimmten Werthe der drei Quotienten einsetzen. Man erhält alsdann:

$$C = -\frac{\left(K \frac{p s_3}{s_3 s_{12}} + 1\right)\left(K \frac{p' s'_1}{s'_1 s'_{23}} + 1\right)}{K \frac{q'' s''_{31}}{s''_{31} s''_2} + 1}. \tag{23.}$$

§ 11.

Ausgeartete trilineare Beziehung.

Von den in mannigfacher Weise auftretenden Ausartungen der trilinearen Beziehung sei hier nur ein Fall hervorgehoben, der sich im folgenden bemerkbar machen wird, und welchen auch bereits Herr *Schubert* unter der Bezeichnung „Ausartung ω“ erwähnt*).

Er entsteht dadurch, dass ein Projectionscentrum, z. B. O, auf der zugehörigen Axe $\mathfrak{l}$ selbst liegt (vergl. Fig. 14). Es fallen dann die zwei Kernpunkte p und q mit O zusammen.

Sowohl aus dieser geometrischen Definition als aus der Grundrelation (2.) geht unmittelbar hervor, dass alsdann der eine Kernpunkt von $\mathfrak{l}$, in welchem p und q vereinigt sind, jeden zwei beliebigen Punkten x' und x'' von $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ zugeordnet ist. Ferner sind die Punkte der Punktreihen $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$, sofern beide von O' und O'' aus auf die Punktreihe $\mathfrak{l}$ perspectivisch bezogen werden, projectivisch gepaart, und jedem Paar entsprechender Punkte x', x'' ist jeder beliebige Punkt x von $\mathfrak{l}$ zugeordnet.

---

§ 12.

Zugeordnete Strahlenbüschel in drei projectiv-trilinearen ebenen Systemen.

Wir wenden uns nunmehr wieder zu der Betrachtung der Eigenschaften dreier projectiv-trilinearer ebenen Systeme und untersuchen den

*) S. a. a. O. § 7.

Zusammenhang, der in denselben zwischen drei zugeordneten Strahlenbüscheln stattfindet.

Denken wir uns die drei Systeme in räumlich-orientirter Lage, so können drei zugeordnete Strahlenbüschel a, a', a'' aufgefasst werden als die Projectionen eines räumlichen Strahlenbündels A. Schneiden nun irgend drei zugeordnete Strahlen $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$, welche die Projectionen eines Strahls $\mathfrak{X}$ des Bündels A vorstellen, die betreffenden Hauptaxen in den Punkten x, x', x'', so repräsentiren x, x', x'' die Projectionen des Punktes X, in welchem der Strahl $\mathfrak{X}$ die Ebene der Hauptaxen schneidet, und bilden somit ein Tripel zugeordneter Punkte. Dasselbe gilt für sämmtliche Punktetripel x, x', x'', in welchen je drei zugeordnete Strahlen $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$ der drei Büschel die Hauptaxen schneiden. Da aber diese Punktetripel drei trilineare Punktreihen bilden, so sind (nach § 5) auch die sie projicirenden Büschel trilinear. Man hat also den Satz:

In drei projectiv-trilinearen ebenen Systemen stehen drei zugeordnete Strahlenbüschel in trilinearer Beziehung. Oder: *Drei Strahlenbüschel, welche irgend drei Projectionen eines Strahlenbündels vorstellen, stehen in trilinearer Beziehung.*

Bei allgemeiner Lage der Centren a, a', a'', wie sie im vorangehenden stillschweigend angenommen wurde, ist die trilineare Beziehung der zugeordneten Strahlenbüschel eine doppelkernige. Für jedes Büschel bilden die durch die zwei Kernpunkte der betreffenden Ebene gehenden Strahlen die Kernstrahlen.

In dem Falle, wo die drei Centren in den drei Hauptaxen liegen, fallen in jedem Büschel die zwei Kernstrahlen zusammen, und die trilineare Beziehung der Büschel wird eine einzelkernige.

Der Beweis hierfür kann in folgender Weise geführt werden:

a, a', a'' (vergl. Fig. 15) seien die Centren der drei Strahlenbüschel, A sei der Punkt, dessen Projectionen sie vorstellen, $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$ seien drei zugeordnete Strahlen der drei Büschel. Derjenige Strahl des Bündels A, dessen Projectionen $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$ repräsentiren, möge die Projectionsebene S in X schneiden. Dann muss X jedenfalls auf dem Strahl $\mathfrak{x}$ liegen. Ferner muss X auf den zwei Linien liegen, nach welchen die durch O' und O'' gelegten projicirenden Ebenen von AX die Ebene S schneiden. Diese Linien finden sich aber leicht wie folgt: Schneidet der Strahl $\mathfrak{x}'$ den Grundschnitt $\mathfrak{g}_{01}$ in s_1, und schneidet $O'a'$ die Hauptaxe pq in c_1, so ist $s_1 c_1$ die

Schnittlinie der projicirenden Ebene durch O'; entsprechend ist, wenn $\mathfrak{x}''$ den Grundschnitt $\mathfrak{g}_{20}$ in s_2 —, und wenn $O''a''$ die Hauptaxe pq in c_2 schneidet, s_2c_2 die Schnittlinie der projicirenden Ebene durch O''. Es müssen sich also die drei Linien $\mathfrak{x}$, c_1s_1, c_2s_2 in dem nämlichen Punkt X schneiden. Betrachtet man nun andere und andere Tripel zugeordneter Strahlen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$, so bleiben die Punkte a, c_1, c_2 unverändert, nur die Richtungen der durch sie gehenden Linien $\mathfrak{x}$, c_1s_1, c_2s_2 ändern sich, jedoch so, dass sie sich immer in einem Punkt X schneiden. Hieraus und aus dem Umstande, dass die Punkte a, c_1, c_2 in gerader Linie liegen, folgt (vergl. § 9, Schluss), dass die von den drei Linien $\mathfrak{x}$, c_1s_1, c_2s_2 gebildeten Strahlenbüschel in einzelkernig-trilinearer Beziehung, und zwar in der *Poncelet–Beziehung,* stehen. Nun ist aber das Strahlenbüschel c_1 perspectivisch zum Strahlenbüschel a', und das Büschel c_2 perspectivisch zum Büschel a''. Daher sind die drei Strahlenbüschel a, a', a'' zu einander allgemein einzelkernig-trilinear.

§ 13.

Fortsetzung. Besondere Fälle.

Es bleiben noch die besonderen Fälle zu betrachten, wo die Centren der drei zugeordneten Strahlenbüschel in Kernpunkte fallen. Liegt ein Centrum in einem Kernpunkte, so muss stets auch noch ein zweites in einen Kernpunkt fallen, und zwar entweder in den correspondirenden oder in den gegnerischen.

1) Nehmen wir zuerst den Fall, dass zwei Centren, z. B. a' und a'' in die correspondirenden Kernpunkte p' und q'' fallen (vergl. Fig. 16). Das dritte Centrum a kann dann jede beliebige Lage in der Ebene S haben. Um zu irgend zwei Strahlen $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ der Büschel p', q'' den dritten zugeordneten des Büschels a zu finden, bestimmt man zu irgend zwei zugeordneten Punkten x', x'' von $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ den dritten zugeordneten x. Dann stellt die Linie ax den dritten zugeordneten Strahl $\mathfrak{x}$ vor. Lässt man die Strahlen $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ variiren, so ändert sich auch der Punkt x und mit ihm der Strahl $\mathfrak{x}$, und man erkennt, dass die Strahlen ax, qx, px drei Strahlenbüschel a, q, p bilden, welche in specieller doppelkernig-trilinearer Beziehung (*Ceva-Beziehung,* vergl. § 6, Abs. 4) stehen. Da aber das Strahlenbüschel q perspectivisch zum Strahlenbüschel p', und das Büschel p perspectivisch zum Büschel q'' ist, so sind die drei Strahlenbüschel a, p', q'' zu einander allgemein doppelkernig-trilinear. Die Kernstrahlen sind ap und aq, $p'k'$

(vergl. Fig. 16) und $p'q'$, $q''p''$ und $q''k''$. — Liegt a auf der Hauptaxe pq, so wird die trilineare Beziehung einzelkernig, die Kernstrahlen fallen in die Hauptaxen.

Es mag hiezu noch folgendes bemerkt werden: Als Projectionen betrachtet, stellen die Punkte p' und q'' die Projectionen des Punktes O aus den Projectionscentren O' und O'' vor, die Linien $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ bilden die Projectionen der durch O gehenden Geraden Ox. Es kommt nun lediglich auf die Definition des Begriffes „Projection einer geraden Linie" an, ob man als Projection der Geraden Ox aus dem Projectionscentrum O eine beliebige durch x gehende Gerade ax — oder den alleinigen Punkt x anerkennen will. Der ersteren Auffassung würde die obige Darstellung entsprechen, derzufolge den Strahlen $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ der zwei Büschel p' und q'' als zugeordneter Strahl im dritten Büschel a der Strahl ax entspricht. Bei der letzteren Auffassung dagegen würde den zwei Strahlenbüscheln p' und q'' der ebenen Systeme S' und S'' im dritten System S nicht wieder ein Strahlenbüschel, sondern eine Punktgruppe zugeordnet sein. Indessen kann man auch diese Punktgruppe zu den zwei Strahlenbüscheln in Beziehung setzen und diese Beziehung als trilinear bezeichnen, insofern die Punktgruppe, wie aus der obigen Betrachtung hervorgeht, aus jedem beliebigen Punkte a der Ebene durch ein Strahlenbüschel projicirt wird, das mit den Strahlenbüscheln p' und q'' trilinear ist*).

2) Wir betrachten ferner den Fall, dass zwei Centren, z. B. a' und a'', in die zwei gegnerischen Kernpunkte q' und p'' fallen. Das dritte Centrum a kann dann jede beliebige Lage auf der Hauptaxe pq haben. Man erkennt leicht, dass in diesem Falle einerseits irgend zweien Strahlen $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ der Büschel q' und p'' stets derselbe in die Hauptaxe pq fallende Strahl des Büschels a zugeordnet ist, während andererseits die Strahlen $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ (als entsprechende Strahlen in den zwei gegnerischen Kernstrahlenbüscheln) projectivisch gepaart sind, und jedem Paar entsprechender Strahlen $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ jeder beliebige Strahl $\mathfrak{x}$ von a zugeordnet ist. Die drei Strahlenbüschel a, q', p'' stehen demnach in der in § 11 erwähnten ausgearteten trilinearen Beziehung.

3) Schliesslich wäre noch der Fall ins Auge zu fassen, dass alle drei Centren in Kernpunkte fallen. Dies ist nur so möglich, dass von

*) Vergl. hierzu § 14.

diesen drei Kernpunkten der eine der correspondirende, der zweite der gegnerische des dritten ist. Nehmen wir z. B. an, zwei Centren liegen, wie im vorigen Fall, in den zwei gegnerischen Kernpunkten q' und p'', das Centrum a aber, welches vorhin beliebig auf der Hauptaxe pq lag, falle jetzt speciell in den mit p'' correspondirenden Kernpunkt q. Die Zuordnungsverhältnisse der Strahlen der drei Büschel bleiben alsdann ganz dieselben wie im vorigen Fall, die Büschel stehen in ausgearteter trilinearer Beziehung.

§ 14.

Zusatz.

Hat man in drei projectiv-trilinearen ebenen Systemen drei zugeordnete Punktgruppen und verbindet in jeder Gruppe auf entsprechende Weise einen mit allen übrigen, so bilden die Verbindungslinien drei trilineare Strahlenbüschel. Dieselben werden von irgend drei geraden Linien nach drei trilinearen Punktreihen geschnitten. Hieraus folgt:

Drei projectiv-trilineare ebene Systeme werden aus irgend drei zugeordneten Punkten durch trilineare Strahlenbüschel projicirt und projiciren sich auf drei beliebige in ihren Ebenen liegende Axen als trilineare Punktreihen, welche doppelkernig oder einzelkernig oder ausgeartet sind, wenn die drei Projectionscentren allgemein —, oder wenn sie auf den Hauptaxen —, oder wenn zwei derselben in gegnerischen Kernpunkten liegen.

(Fortsetzung folgt.)

Ueber eine lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit einem endlichen singulären Punkte.

(Von Herrn *L. Pochhammer* in Kiel.)

Die Differentialgleichung $n$ter Ordnung, welche den Gegenstand der nachfolgenden Untersuchung bildet, ist von Herrn *Goursat* in seiner Abhandlung „Mémoire sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur" aufgestellt worden*). Die Gleichung kann als ein Grenzfall der allgemeineren hypergeometrischen Differentialgleichung (mit zwei endlichen singulären Punkten) angesehen werden, und lässt sich, wie diese, durch bestimmte Integrale lösen. Sie hat den eindeutigen Ausdruck

$$(1.)\quad \begin{cases} F(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1};\ \varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{n-1};\ x) = \\ 1+\dfrac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}{1.\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_{n-1}}\,x+\dfrac{\alpha_1(\alpha_1+1)\alpha_2(\alpha_2+1)\dots\alpha_{n-1}(\alpha_{n-1}+1)}{1.2.\varrho_1(\varrho_1+1)\varrho_2(\varrho_2+1)\dots\varrho_{n-1}(\varrho_{n-1}+1)}\,x^2+\cdots \text{inf.}, \end{cases}$$

der für beliebige endliche Werthe von x convergirt, zum particulären Integral; ausserdem genügen derselben $n-1$ Producte aus je einer Potenz von x und einer Reihe von der Form (1.).

Wird die Reihe (1.) mit einem Producte aus gewissen *Euler*schen Integralen multiplicirt, so geht sie in ein $(n-1)$-faches bestimmtes Integral über. Für $n=3$ besteht z. B., wie Herr *Goursat* angiebt, die Identität

$$(2.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 v^{\beta-1}(1-v)^{\sigma-\beta-1}dv\int_0^1 e^{uvx}u^{\alpha-1}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}du = \\ E(\alpha,\varrho-\alpha)E(\beta,\sigma-\beta)\left\{1+\dfrac{\alpha\beta}{1.\varrho\sigma}\,x+\dfrac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)\sigma(\sigma+1)}\,x^2+\cdots\right\}, \end{cases}$$

welche man durch Entwickelung der Grösse e^{uvx} in die Potenzreihe beweist; durch $E(p,q)$ wird hier das *Euler*sche Integral erster Art

$$(3.)\qquad E(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du$$

bezeichnet.

---

*) Annales de l'École Normale, Série II, tome XII, 1883, p. 285.

In den nachstehenden Rechnungen wird auf die Lösung jener Differentialgleichung $n$ter Ordnung durch bestimmte Integrale näher eingegangen. Man findet, dass die Reihe (1.) nach Multiplication mit passenden Constanten sich auf mehrere verschiedene Arten als ein $(n-1)$-faches bestimmtes Integral schreiben lässt. Diese Mannigfaltigkeit der Darstellung der bezüglichen Functionen gestattet es, die Differentialgleichung $n$ter Ordnung durch $(n-1)$-fache bestimmte Integrale zu lösen, bei denen nur die Grenzen wechselnde Werthe haben, während die zu integrirende Function in allen Integralen eine und dieselbe ist. Die Integration der Gleichung geschieht nach dem nämlichen Verfahren, welches der Verfasser in der Abhandlung „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten*)" angewendet hat. Zwischen den hier abgeleiteten Resultaten und denen der letzteren Abhandlung besteht jedoch in so fern ein wesentlicher Unterschied, als man im Folgenden, um das vollständige System der Hauptintegrale der betrachteten Gleichung zu erhalten, auch gewisse geschlossene Integrationswege für die bestimmten Integrale benutzen muss. Dies bewirkt, dass bei dem Uebergang zu den zugehörigen Potenzreihen die den Gammafunctionen analogen Integrale (mit geschlossenem Integrationsweg), welche *H. Hankel* zuerst behandelt hat**), als Multiplicatoren der Reihen auftreten.

Die Gültigkeit der Lösung einer Differentialgleichung durch bestimmte Integrale ist selbstverständlich an die Bedingung, dass diese Integrale convergiren, geknüpft. Es ist nun zu bemerken, dass bei der hier behandelten Differentialgleichung sich stets convergente bestimmte Integrale angeben lassen, die ihr genügen. Denn wenn die bestimmten Integrale mit einfacherem Integrationsweg, welche man zunächst findet, divergent werden, kann man an ihrer Stelle Integrale mit Doppelumlauf anwenden, in der Art, wie der Verfasser dies für die Differentialgleichung der *Gauss*schen hypergeometrischen Reihe***) und für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten†), — auf welche die im Fol-

*) Dieses Journal, Bd. 102, S. 76.

**) „Die *Euler*schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Arguments", *Schlömilchs* Zeitschrift für Math. u. Physik, Jahrg. 9, 1864.

***) „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf", § 3, Math. Ann., Bd. 35, S. 470 und „Zur Theorie der *Euler*schen Integrale", § 4, Math. Ann., Bd. 35, S. 495.

†) Math. Annalen Bd. 36, S. 84.

genden betrachtete Differentialgleichung sich im Fall $n = 2$ reducirt —, näher ausgeführt hat.

Die in der Reihe (1.) vorkommenden Constanten bleiben im Uebrigen beliebig, nur soll keine der Grössen ϱ_ν, $\varrho_\mu - \varrho_\nu$ ganzzahlig sein. Durch diese Einschränkung schliesst man diejenigen Fälle aus, in denen die Differentialgleichung logarithmische Integrale besitzt.

Den auf die Differentialgleichung $n$ter Ordnung bezüglichen Rechnungen ist in §§ 1 und 2 die Behandlung der betreffenden Gleichung dritter Ordnung vorausgeschickt worden. In § 2 werden die Integrale mit doppeltem Umlauf, die für beliebige Werthe der Constanten convergent sind, eingeführt. Der § 3 enthält die Rechnungen, durch welche man die Integration der Differentialgleichung $n$ter Ordnung auf die Lösung einer analog gebildeten Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung reducirt. In § 4 wird das System der $(n-1)$-fachen bestimmten Integrale, die der Gleichung $n$ter Ordnung genügen (und die als zu integrirende Function sämmtlich den in (78.) bezeichneten Ausdruck Φ enthalten), ermittelt, und der Zusammenhang derselben mit den zugehörigen Potenzreihen festgestellt.

§ 1.

Wird die Function y durch die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(4.)\quad \left\{\begin{array}{l} f_3(x)\dfrac{d^3y}{dx^3} + \left[\dfrac{\beta+2}{1} f_3'(x) - f_2(x)\right]\dfrac{d^2y}{dx^2} \\ + \left[\dfrac{(\beta+2)(\beta+1)}{1.2} f_3''(x) - \dfrac{\beta+1}{1} f_2'(x) + f_1(x)\right]\dfrac{dy}{dx} \\ + \left[\dfrac{(\beta+2)(\beta+1)\beta}{1.2.3} f_3'''(x) - \dfrac{(\beta+1)\beta}{1.2} f_2''(x) + \dfrac{\beta}{1} f_1'(x)\right] y \end{array}\right\} = 0$$

bestimmt, woselbst β eine Constante, $f_\nu(x)$ eine ganze Function νten oder niedrigeren Grades von x, und $f_\nu'(x)$, $f_\nu''(x)$ etc. die Ableitungen von $f_\nu(x)$ bedeuten, so ist der Ausdruck

$$(5.)\qquad y = \int_{g_2}^{h_2} (v-x)^{-\beta}\mathfrak{V}\,dv$$

für passende Werthe der Grenzen g_2, h_2 ein particuläres Integral von (4.), falls die von v allein abhängige Function $\mathfrak{V}$ der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(6.)\qquad \frac{d^2(f_3(v)\mathfrak{V})}{dv^2} - \frac{d(f_2(v)\mathfrak{V})}{dv} + f_1(v)\mathfrak{V} = 0$$

genügt*). Von den Grössen g_2, h_2 ist g_2 constant, h_2 entweder constant oder gleich x; dieselben müssen die Gleichung

$$(7.)\qquad [M_2]_{v=h_2} - [M_2]_{v=g_2} = 0$$

befriedigen, in welcher M_2 die Summe

$$(8.)\qquad M_2 = -(\beta+1)(v-x)^{-\beta-2} f_3(v)\mathfrak{V} + (v-x)^{-\beta-1}\left[f_2(v)\mathfrak{V} - \frac{d(f_3(v)\mathfrak{V})}{dv}\right]$$

bezeichnet. Führt man an Stelle von $\mathfrak{V}$ eine andere Grösse V mittelst der Gleichung

$$(9.)\qquad \mathfrak{V} = v^{\beta-\sigma} V$$

ein, wodurch die Function (5.) die Gestalt

$$(10.)\qquad y = \int_{g_2}^{h_2} (v-x)^{-\beta} v^{\beta-\sigma} V dv$$

annimmt, so gilt für V die Differentialgleichung

$$(11.)\qquad \frac{d^2(v^{\beta-\sigma} f_3(v)V)}{dv^2} - \frac{d(v^{\beta-\sigma} f_2(v)V)}{dv} + v^{\beta-\sigma} f_1(v) V = 0.$$

Die Functionen f_1, f_2, f_3 lassen sich derartig bestimmen, dass aus (11.) eine Differentialgleichung von der Form

$$(12.)\qquad v\frac{d^2V}{dv^2} - (v-\varrho')\frac{dV}{dv} - \alpha' V = 0,$$

wo α', ϱ' constant sind, erhalten wird. Man multiplicire die letztere Gleichung durch $v^{\beta-\sigma+1}$ und setze hierauf die Coëfficienten von $\frac{d^2V}{dv^2}$, $\frac{dV}{dv}$ und V den entsprechenden Coefficienten in (11.) gleich. Dann findet man

$$v^{\beta-\sigma} f_3(v) = v^{\beta-\sigma+2},$$

$$\frac{2d(v^{\beta-\sigma} f_3(v))}{dv} - v^{\beta-\sigma} f_2(v) = -(v-\varrho')v^{\beta-\sigma+1},$$

$$\frac{d^2(v^{\beta-\sigma} f_3(v))}{dv^2} - \frac{d(v^{\beta-\sigma} f_2(v))}{dv} + v^{\beta-\sigma} f_1(v) = -\alpha' v^{\beta-\sigma+1},$$

woraus

$$(13.)\qquad \begin{cases} f_3(v) = v^2, \quad f_2(v) = v^2 + (2\beta-\varrho'-2\sigma+4)v, \\ f_1(v) = (\beta-\alpha'-\sigma+2)v + (\beta-\sigma+1)(\beta-\varrho'-\sigma+2) \end{cases}$$

folgt. Man nenne α und ϱ zwei Constante, welche mit den Constanten

*) Cfr. § 2 der oben erwähnten Abhandlung „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe etc.", S. 84 des 102. Bandes dieses Journals.

α', ϱ', σ durch die Gleichungen

$$(14.)\qquad \alpha' = \alpha-\sigma+1,\quad \varrho' = \varrho-\sigma+1$$

verbunden sind; dann nehmen die Gleichungen (13.), in denen statt v das Argument x angewendet werden möge, die Gestalt

$$f_3(x) = x^2,\quad f_2(x) = x^2+(2\beta-\varrho-\sigma+3)x,$$
$$f_1(x) = (\beta-\alpha+1)x+(\beta-\varrho+1)(\beta-\sigma+1)$$

an. Durch Substitution dieser Werthe ergiebt sich aus (4.) die Differentialgleichung

$$(15.)\qquad x^2\frac{d^3y}{dx^3} = [x^2-(\varrho+\sigma+1)x]\frac{d^2y}{dx^2}+[(\alpha+\beta+1)x-\varrho\sigma]\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y.$$

Da nun die Gleichung (12.) durch einfache bestimmte Integrale lösbar ist, so führt die obige Rechnung zu particulären Lösungen der Differentialgleichung (15.) in Gestalt bestimmter Doppelintegrale.

Integrirt man die Gleichung (15.) durch Reihen, die nach Potenzen von x aufsteigen, so findet man bei Benutzung der abgekürzten Bezeichnung

$$(16.)\quad F(\alpha,\beta;\ \varrho,\sigma;\ x) = 1+\frac{\alpha\beta}{1.\varrho\sigma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)\sigma(\sigma+1)}x^2+\cdots \text{inf.}$$

die Ausdrücke

$$(17.)\qquad y_1 = F(\alpha,\beta;\ \varrho,\sigma;\ x),$$
$$(18.)\qquad y_2 = x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1,\beta-\varrho+1;\ \sigma-\varrho+1,2-\varrho;\ x),$$
$$(19.)\qquad y_3 = x^{1-\sigma}F(\alpha-\sigma+1,\beta-\sigma+1;\ \varrho-\sigma+1,2-\sigma;\ x)$$

als particuläre Lösungen von (15.). Diese Reihen lassen sich, nach Hinzufügung gewisser constanter Factoren, als Doppelintegrale schreiben, die in Bezug auf die zu integrirende Function übereinstimmen, und die sich aus dem Ausdruck (10.) ergeben.

Für die Grösse V werden in (10.) nach einander zwei verschiedene particuläre Integrale der Gleichung (12.) substituirt. Bekanntlich lauten die Hauptlösungen der Differentialgleichung (12.) in Reihenform

$$(20.)\qquad \zeta_1 = F(\alpha';\ \varrho';\ v) = F(\alpha-\sigma+1;\ \varrho-\sigma+1;\ v),$$
$$(21.)\quad \zeta_2 = v^{1-\varrho'}F(\alpha'-\varrho'+1;\ 2-\varrho';\ v) = v^{\sigma-\varrho}F(\alpha-\varrho+1;\ \sigma-\varrho+1;\ v),$$

wo $F(\alpha;\ \varrho;\ v)$ den Ausdruck

$$(22.)\qquad F(\alpha;\ \varrho;\ v) = 1+\frac{\alpha}{1.\varrho}v+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)}v^2+\cdots \text{inf.}$$

bedeutet. Die Reihen (20.) und (21.) sind, abgesehen von constanten Fac-

toren, mit einfachen bestimmten Integralen identisch. Wird durch $E(p,q)$ das *Euler*sche Integral erster Art

$$E(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du$$

bezeichnet, so hat man für ζ_2 die Gleichung

$$(23.)\quad \int_0^v e^u(u-v)^{\sigma-\alpha-1}u^{\alpha-\varrho}du = (-1)^{\sigma-\alpha-1}\zeta_2 E(\alpha-\varrho+1, \sigma-\alpha).$$

Auch die Reihe ζ_1 lässt sich, nach Multiplication mit einer Constante, als ein Integral der Function

$$(24.)\quad e^u(u-v)^{\sigma-\alpha-1}u^{\alpha-\varrho}$$

darstellen; man wendet dann für die Variable u einen geschlossenen Integrationsweg an, der bei $-\infty$ beginnt und endigt, und der die Punkte v und 0 umschliesst. Zwischen dem so gebildeten Integral und der Reihe ζ_1 besteht die Gleichung*)

$$(25.)\quad \overline{\int_{-\infty}^{(v,0)}} e^u(u-v)^{\sigma-\alpha-1}u^{\alpha-\varrho}du = \zeta_1\overline{\Gamma}(\sigma-\varrho),$$

woselbst unter $\overline{\Gamma}(q)$ das Integral

$$(26.)\quad \overline{\Gamma}(q) = \overline{\int_{-\infty}^{(0)}} e^u u^{q-1}du$$

(das nur in formaler Beziehung von dem *Hankel*schen Integrale abweicht) verstanden wird**). Setzt man an Stelle von V die in (23.) und (25.) angegebenen bestimmten Integrale ein und nennt zur Abkürzung $\Phi(u,v,x)$ die Function

$$(27.)\quad \Phi(u,v,x) = (v-x)^{-\beta}v^{\beta-\sigma}e^u(u-v)^{\sigma-\alpha-1}u^{\alpha-\varrho},$$

so entsteht aus (10.) die Gleichung

$$y = \int_{g_1}^{h_1}dv\int_0^v \Phi(u,v,x)du,$$

beziehungsweise

$$y = \int_{g_2}^{h_2}dv\overline{\int_{-\infty}^{(v,0)}}\Phi(u,v,x)du.$$

*) Cfr. den Aufsatz des Verfassers „Ueber die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten“, Math. Annalen Bd. 36 (§ 3, Gleichung (25.)).

**) Wegen der abgekürzten Bezeichnung der Integrale mit geschlossenem Integrationswege vergleiche man § 3 der Abhandlung „Ueber ein vielfaches, auf *Euler*sche Integrale reducirbares Integral“, Bd. 107 dieses Journals, S. 250, resp. die Abh. „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf“, Math. Annalen, Bd. 35, S. 472.

Die in (8.) definirte Grösse M_2 verschwindet für $v=x$, falls der reelle Theil von $\beta+2$ negativ ist. Wird M_2 nach steigenden Potenzen von v entwickelt, so ist der Exponent der niedrigsten Potenz gleich $\beta-\sigma+1$, falls für V die Reihe ζ_1, und gleich $\beta-\varrho+1$, falls für V die Reihe ζ_2 gewählt wird. Man nehme an, dass die reellen Bestandtheile von $\beta-\varrho+1$ und $\beta-\sigma+1$ positiv seien, und der von $\beta+2$ negativ. Dann wird der Bedingung (7.) durch die Werthe

$$g_2=0,\quad h_2=x,$$

genügt. Man gelangt somit zu dem Resultat, dass die Doppelintegrale

$$\int_0^x dv\int_0^v \Phi(u,\ v,\ x)\,du, \tag{28.}$$

$$\int_0^x dv\int_{-x}^{\overline{(v,0)}} \Phi(u,\ v,\ x)\,du, \tag{29.}$$

in denen $\Phi(u,v,x)$ die Function (27.) bedeutet, particuläre Lösungen der Differentialgleichung (15.) sind.

Um das Integral (28.) nach steigenden Potenzen von x zu entwickeln, führt man an Stelle von u, v neue Variable $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ mittelst der Gleichungen

$$u=\mathfrak{u}v=\mathfrak{u}\mathfrak{v}x,\quad v=\mathfrak{v}x$$

ein, wodurch der Ausdruck

$$(-1)^{\sigma-\alpha-\beta-1}x^{1-\varrho}\int_0^1 \mathfrak{v}^{\beta-\varrho}(1-\mathfrak{v})^{-\beta}d\mathfrak{v}\int_0^1 e^{\mathfrak{u}\mathfrak{v}x}\mathfrak{u}^{\alpha-\varrho}(1-\mathfrak{u})^{\sigma-\alpha-1}d\mathfrak{u}$$

aus (28.) erhalten wird, und substituirt für $e^{\mathfrak{u}\mathfrak{v}x}$ die Reihe $1+\frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v}x}{1}+\cdots$. Dann ergiebt sich (nach Berücksichtigung von (3.)) die Reihe

$$(-1)^{\sigma-\alpha-\beta-1}x^{1-\varrho}\left\{\begin{aligned}&E(\alpha-\varrho+1,\ \sigma-\alpha)E(\beta-\varrho+1,\ 1-\beta)\\ +\frac{x}{1}\ &E(\alpha-\varrho+2,\ \sigma-\alpha)E(\beta-\varrho+2,\ 1-\beta)\\ +\frac{x^2}{1.2}\ &E(\alpha-\varrho+3,\ \sigma-\alpha)E(\beta-\varrho+3,\ 1-\beta)+\cdots\end{aligned}\right\},$$

die nach Anwendung der Formel

$$E(p+m,\ q)=\frac{p(p+1)\dots(p+m-1)}{(p+q)(p+q+1)\dots(p+q+m-1)}E(p,\ q) \tag{30.}$$

in das Product aus der Constante

$$(-1)^{\sigma-\alpha-\beta-1}E(\alpha-\varrho+1,\ \sigma-\alpha)E(\beta-\varrho+1,\ 1-\beta)$$

und der Function

$$x^{1-\varrho}\left\{1+\frac{(\alpha-\varrho+1)(\beta-\varrho+1)}{1.(\sigma-\varrho+1)(2-\varrho)}x+\frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)(\beta-\varrho+1)(\beta-\varrho+2)}{1.2(\sigma-\varrho+1)(\sigma-\varrho+2)(2-\varrho)(3-\varrho)}x^2+\cdots\right\}$$

übergeht. Der Vergleich mit (18.) zeigt, dass

$$(31.)\quad \begin{cases} \int_0^x dv\int_0^v \Phi(u,v,x)du \\ = (-1)^{\sigma-\alpha-\beta-1}E(\alpha-\varrho+1,\sigma-\alpha)E(\beta-\varrho+1,1-\beta)y_2 \end{cases}$$

ist.

Für das Doppelintegral (29.) werde festgesetzt, dass der Integrationsweg der Variable u sich einerseits aus einem Kreise um $u=0$, welcher den Integrationsweg der Variable v völlig umschliesst, andererseits aus dem (doppelt durchlaufenen) ausserhalb des Kreises liegenden Abschnitte der negativen reellen Axe zusammensetzen soll. Dann kann die Potenz $(u-v)^{\sigma-\alpha-1}$ in (29.) nach dem binomischen Satze in die Reihe

$$u^{\sigma-\alpha-1}\left(1-\frac{v}{u}\right)^{\sigma-\alpha-1} = u^{\sigma-\alpha-1}\left\{1-\frac{\sigma-\alpha-1}{1}\frac{v}{u}+\frac{(\sigma-\alpha-1)(\sigma-\alpha-2)}{1.2}\frac{v^2}{u^2}-\cdots\right\}$$

entwickelt werden. Diese Reihe convergirt, da nach der Voraussetzung mod. u stets grösser als mod. v ist. Der Ausdruck, der hierdurch aus (29.) erhalten wird, lautet

$$\bar{\Gamma}(\sigma-\varrho)\int_0^x(v-x)^{-\beta}v^{\beta-\sigma}dv-(\sigma-\alpha-1)_1\bar{\Gamma}(\sigma-\varrho-1)\int_0^x(v-x)^{-\beta}v^{\beta-\sigma+1}dv+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^k(\sigma-\alpha-1)_k\bar{\Gamma}(\sigma-\varrho-k)\int_0^x(v-x)^{-\beta}v^{\beta-\sigma+k}dv+\cdots,$$

wo $(\sigma-\alpha-1)_k$ den Binomialcoefficienten

$$(\sigma-\alpha-1)_k = \frac{(\sigma-\alpha-1)(\sigma-\alpha-2)\dots(\sigma-\alpha-k)}{1.2\dots k}$$

$$= (-1)^k\frac{(\alpha-\sigma+1)(\alpha-\sigma+2)\dots(\alpha-\sigma+k)}{1.2\dots k},$$

und $\bar{\Gamma}(q)$ das Integral (26.) bedeutet. Für das letztere gilt aber, wenn k eine positive ganze Zahl ist, die Formel*)

$$(32.)\qquad \bar{\Gamma}(q-k) = (-1)^k\frac{\bar{\Gamma}(q)}{(q-1)(q-2)\dots(q-k)},$$

*) Man vergleiche die Abhandlung des Verfassers „Zur Theorie der *Euler*schen Integrale" im 35. Bande der Math. Annalen, § 3, Gleichung (38.).

so dass

$$\bar{\Gamma}(\sigma-\varrho-k) = \frac{(-1)^k\bar{\Gamma}(\sigma-\varrho)}{(\sigma-\varrho-1)(\sigma-\varrho-2)\dots(\sigma-\varrho-k)} = \frac{\bar{\Gamma}(\sigma-\varrho)}{(\varrho-\sigma+1)(\varrho-\sigma+2)\dots(\varrho-\sigma+k)}$$

ist. Da ferner das Integral

$$\int_0^x (v-x)^{-\beta} v^{\beta-\sigma+k} dv$$

sich durch die Substitution $v = \mathfrak{v}x$ in das Product

$$(-1)^\beta x^{1-\sigma+k} E(\beta-\sigma+k+1, 1-\beta)$$
$$= (-1)^\beta x^{1-\sigma+k} \frac{(\beta-\sigma+1)(\beta-\sigma+2)\dots(\beta-\sigma+k)}{(2-\sigma)(3-\sigma)\dots(k+1-\sigma)} E(\beta-\sigma+1, 1-\beta)$$

verwandelt, so nimmt der allgemeine Term der obigen Reihe die Form

$$(-1)^\beta \bar{\Gamma}(\sigma-\varrho)E(\beta-\sigma+1, 1-\beta)\frac{(\alpha-\sigma+1)\dots(\alpha-\sigma+k)(\beta-\sigma+1)\dots(\beta-\sigma+k)}{k!(\varrho-\sigma+1)\dots(\varrho-\sigma+k)(2-\sigma)\dots(k+1-\sigma)} x^{1-\sigma+k}$$

an. Folglich ist das Integral (29.) mit der Reihe (19.) durch die Gleichung

$$(33.)\qquad \int_0^x dv \bar{\int}_{-\infty}^{(v,0)} \Phi(u, v, x)du = (-1)^\beta \bar{\Gamma}(\sigma-\varrho)E(\beta-\sigma+1, 1-\beta)y_3$$

verbunden.

Um endlich ein Doppelintegral der Function $\Phi(u, v, x)$ zu erhalten, welches, abgesehen von einem constanten Factor, mit der Reihe (17.) identisch ist, wählt man für die Variable v einen geschlossenen Integrationsweg, ähnlich dem, der in (29.) für u angewendet wurde. Man legt um den Nullpunkt einen Kreis, der den Punkt x umschliesst; der Schnittpunkt des Kreises mit der negativen reellen Axe heisse S. Dann soll die Variable v zunächst die negativen reellen Werthe von $-\infty$ bis S annehmen, hierauf den genannten Kreis (in positiver Drehungsrichtung) durchlaufen und von S längs der negativen reellen Axe zu $-\infty$ zurückkehren. Die Grenzen für die Integration nach u seien 0 und v. In dem so definirten Doppelintegral, für welches man die abgekürzte Bezeichnung

$$(34.)\qquad \int_{-\infty}^{(0,x)} dv \int_0^v \Phi(u, v, x)du$$

hat, werde der Factor $(v-x)^{-\beta}$ der Function $\Phi(u, v, x)$ in die Reihe

$$v^{-\beta}\left(1-\frac{x}{v}\right)^{-\beta} = v^{-\beta}\left\{1+\frac{\beta}{1}\frac{x}{v}+\dots+\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{1.2\dots k}\frac{x^k}{v^k}+\dots\right\}$$

entwickelt; dieselbe ist convergent, da mod. v für alle Punkte des Integrationsweges grösser als mod. x ist. Das Integral (34.) geht hierdurch in den

Ausdruck

$$N_0+\frac{\beta}{1}N_1x+\frac{\beta(\beta+1)}{1.2}N_2x^2+\cdots+\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{1.2\dots k}N_kx^k+\cdots$$

über, in welchem N_k die (von x unabhängige) Grösse

$$N_k = \overline{\int_{-\infty}^{(0)}} v^{-\sigma-k}dv\int_0^v e^u(u-v)^{\sigma-\alpha-1}u^{\alpha-\varrho}du$$

bezeichnet. Die Substitution $u=vt$ verwandelt N_k in das Doppelintegral

$$N_k = (-1)^{\sigma-\alpha-1}\overline{\int_{-\infty}^{(0)}} v^{-\varrho-k}dv\int_0^1 e^{vt}t^{\alpha-\varrho}(1-t)^{\sigma-\alpha-1}dt,$$

auf das die Formel (21.) des Aufsatzes „Ueber ein vielfaches, auf *Euler*sche Integrale reducirbares Integral"*) anwendbar ist ($a=\varrho+k,\ b=\alpha-\varrho,\ c=\sigma-\alpha$), so dass die Gleichung

$$N_k = (-1)^{\sigma-\alpha-1}\bar{\Gamma}(1-\varrho-k)E(\alpha+k,\sigma-\alpha)$$

erhalten wird. Da ferner nach (32.) und (30.)

$$\bar{\Gamma}(1-\varrho-k) = \frac{\bar{\Gamma}(1-\varrho)}{\varrho(\varrho+1)\dots(\varrho+k-1)},$$

$$E(\alpha+k,\sigma-\alpha) = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}{\sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+k-1)}E(\alpha,\sigma-\alpha)$$

ist, so findet man für N_k den Werth

$$N_k = (-1)^{\sigma-\alpha-1}\bar{\Gamma}(1-\varrho)E(\alpha,\sigma-\alpha)\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}{\varrho(\varrho+1)\dots(\varrho+k-1)\sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+k-1)}.$$

Folglich gilt für das Integral (34.) die Gleichung

$$(35.)\quad \begin{cases} \overline{\int_{-\infty}^{(0,x)}} dv\int_0^v \Phi(u,v,x)du = (-1)^{\sigma-\alpha-1}\bar{\Gamma}(1-\varrho)E(\alpha,\sigma-\alpha)y_\Gamma \\ \qquad = (-1)^{\sigma-\alpha-1}\bar{\Gamma}(1-\varrho)E(\alpha,\sigma-\alpha)F(\alpha,\beta;\ \varrho,\sigma;\ x). \end{cases}$$

Hiermit sind in der That sämmtliche Hauptintegrale der Differentialgleichung (15.) als bestimmte Doppelintegrale, in denen die zu integrirende Function gleich $\Phi(u,v,x)$ ist, dargestellt worden.

Es ist zu bemerken, dass das Integral

$$(36.)\qquad \overline{\int_{-\infty}^{(0,x)}}(v-x)^{-\beta}v^{\beta-\sigma}V dv,$$

*) Dieses Journal, Bd. 107, S. 252.

in welchem v den oben erwähnten Integrationsweg durchläuft, sich von der Reihe $F(\alpha, \beta;\ \varrho, \sigma;\ x)$ stets nur durch einen constanten Factor unterscheidet, sobald unter V eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (12.) verstanden wird. Das Integral (36.) geht in das soeben behandelte Integral (34.) über, wenn man für V das particuläre Integral

$$\int_0^v e^u (u-v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho} du$$

wählt, das nach (23.) gleich dem Product aus der Reihe ζ_2 und einer Constanten ist. Es soll nunmehr auch das eindeutige Hauptintegral der Gleichung (12.), welches in Reihenform durch ζ_1 angegeben wird, in (36.) für V substituirt werden. Man drückt V wiederum durch ein bestimmtes Integral aus, benutzt aber hierfür nicht das in (25.) bezeichnete, sondern ein anderes bestimmtes Integral, das durch eine einfache Umformung erhalten wird.

In (12.) werde an Stelle von V eine neue Variable η mittelst der Gleichung

$$V = v^{1-\varrho'} \eta = v^{\sigma-\varrho} \eta$$

eingeführt. Dann ergiebt sich für η die Differentialgleichung

$$(37.)\qquad v \frac{d^2\eta}{dv^2} - (v+\varrho'-2) \frac{d\eta}{dv} - (\alpha'-\varrho'+1)\eta = 0,$$

welche dieselbe Gestalt wie die Gleichung (12.) hat. Wird nach (14.)

$$\alpha' = \alpha-\sigma+1, \quad \varrho' = \varrho-\sigma+1$$

gesetzt, so lautet die Gleichung (12.)

$$v \frac{d^2 V}{dv^2} - (v+\sigma-\varrho-1) \frac{dV}{dv} - (\alpha-\sigma+1)V = 0,$$

und die Gleichung (37.)

$$v \frac{d^2\eta}{dv^2} - (v+\varrho-\sigma-1) \frac{d\eta}{dv} - (\alpha-\varrho+1)\eta = 0.$$

Die Coefficienten der zwei Gleichungen gehen in einander über, wenn man die Constanten ϱ und σ mit einander vertauscht. Das mehrdeutige Hauptintegral der Gleichung (37.) wird also nach (23.) und (21.) — woselbst ϱ und σ zu vertauschen sind — durch die Ausdrücke

$$\int_0^v e^u (u-v)^{\varrho-\alpha-1} u^{\alpha-\sigma} du,$$

$$= (-1)^{\varrho-\alpha-1} E(\alpha-\sigma+1, \varrho-\alpha) v^{\varrho-\sigma} F(\alpha-\sigma+1;\ \varrho-\sigma+1;\ v)$$

dargestellt. Der zugehörige Werth von V, der hieraus durch Multiplication mit $v^{\sigma-\varrho}$ entsteht, hat, wie der Vergleich mit (20.) zeigt, die Form Const. ζ_1. Also kann man das eindeutige Hauptintegral der Gleichung (12.), das in (36.) für V eingesetzt werden soll, als das Product

$$v^{\sigma-\varrho}\int_0^v e^u (u-v)^{\varrho-\alpha-1} u^{\alpha-\sigma} du$$

schreiben. Der Ausdruck (36.) wird dann gleich dem Doppelintegral

$$(38.)\qquad \overline{\int}_{-\infty}^{(0,x)} (v-x)^{-\beta} v^{\beta-\varrho} dv \int_0^v e^u (u-v)^{\varrho-\alpha-1} u^{\alpha-\sigma} du,$$

welches sich — cfr. (27.) — von dem Doppelintegral (34.) nur dadurch unterscheidet, dass die Constanten ϱ und σ mit einander vertauscht sind. Da nun die Function $F(\alpha, \beta;\ \varrho, \sigma;\ x)$ in Bezug auf ϱ und σ symmetrisch ist, so folgt aus der Formel (35.), dass das Integral (38.) sich in die Reihe

$$(-1)^{\varrho-\alpha-1} \overline{\Gamma}(1-\sigma) E(\alpha, \varrho-\alpha) F(\alpha, \beta;\ \varrho, \sigma;\ x)$$

entwickeln lässt. Auf diese Weise haben sich in den zwei Fällen, wo V gleich dem mehrdeutigen oder gleich dem eindeutigen Hauptintegral von (12.) gewählt wurde, Werthe von der Form

$$\text{Const. } F(\alpha, \beta;\ \varrho, \sigma;\ x)$$

für das Integral (36.) ergeben; und da jede particuläre Lösung der Differentialgleichung (12.) eine lineare Function der zwei Hauptlösungen ist, so hat man die angeführte Eigenschaft des Integrals (36.) hiermit allgemein bewiesen.

§ 2.

Die Constanten α, β, ϱ, σ müssen, damit die vorstehenden Rechnungen in Kraft bleiben, gewissen Ungleichheiten genügen. Die Doppelintegrale (28.), (29.), (34.), welche als particuläre Lösungen der Differentialgleichung (15.) ermittelt wurden, sind, wie aus bekannten Sätzen folgt, nur für bestimmte Werthgebiete der obigen Constanten convergent. Die in § 1 abgeleiteten Resultate lassen sich jedoch in der Art verallgemeinern, dass auch für beliebige Werthe von α, β, ϱ, σ eine vollständige Lösung der Gleichung (15.) in Form bestimmter Doppelintegrale erhalten wird. Die einzige Einschränkung, der die Constanten unterliegen, ist die in der Einleitung erwähnte, dass ϱ, σ, $\varrho-\sigma$ nicht ganzzahlig sein sollen.

Die in (8.) definirte Summe M_2 hat, als Function von v, keine anderen (endlichen) Verzweigungspunkte als die Punkte $v=0$ und $v=x$. Denn $f_3(v)$, $f_2(v)$ sind ganze Functionen von v, und die Grösse $\mathfrak{V}$ verzweigt sich — nach (9.) und (12.) — nur im Punkte $v=0$. Wird für V zunächst die particuläre Lösung ζ_1 der Gleichung (12.) gesetzt, so geht M_2 in den Ausdruck

$$-(\beta+1)(v-x)^{-\beta-2}v^{\beta-\sigma+2}\zeta_1+(v-x)^{-\beta-1}v^{\beta-\sigma+1}\left[(v+\beta-\varrho+1)\zeta_1-v\frac{d\zeta_1}{dv}\right]$$

über, welcher in der Umgebung des Punktes $v=0$ gleich dem Product aus der Potenz $v^{\beta-\sigma+1}$ und einer daselbst eindeutigen stetigen Function von v ist. Man nehme nun einen beliebigen Punkt c als Ausgangspunkt und Endpunkt der v-Curve an und lasse die Variable v zuerst einen positiven Umlauf um den Punkt x, dann einen positiven Umlauf um den Punkt 0, hierauf einen negativen Umlauf um den Punkt x und endlich einen negativen Umlauf um den Punkt 0 ausführen. Es ist ersichtlich, dass die Grösse M_2 im Endpunkte des ganzen Weges ihren anfänglichen Werth wiedererlangt; denn bei den genannten Umläufen nimmt sie nach einander die Factoren

$$e^{-2\pi i\beta},\quad e^{2\pi i(\beta-\sigma)},\quad e^{2\pi i\beta},\quad e^{-2\pi i(\beta-\sigma)}$$

auf, die sich gegenseitig fortheben. Der Bedingung (7.)

$$[M_2]_{v=h_2}-[M_2]_{v=g_2} = 0$$

wird also im gedachten Falle durch die Werthe

$$g_2 = h_2 = c$$

Genüge geleistet. Hieraus folgt, dass das bestimmte Integral

$$\int_c (v-x)^{-\beta}v^{\beta-\sigma}\zeta_1 dv,$$

in welchem v den soeben angegebenen Weg durchläuft, eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (15.) ist. Man wendet für das letztere Integral die abgekürzte Bezeichnung*)

$$(39.)\qquad \int_c^{\overline{(x,0,x-,0-)}}(v-x)^{-\beta}v^{\beta-\sigma}\zeta_1 dv$$

an, indem man an derjenigen Stelle, die sonst von der oberen Integral-

*) Cfr. die Abh. „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf", Math. Ann., Bd. 35, S. 472.

grenze eingenommen wird, die von v umkreisten singulären Punkte nach einander (in Klammern eingeschlossen und unter Andeutung der Drehungsrichtung) namhaft macht.

Wird ferner in M_2 und in (10.) für V der Ausdruck ζ_2 substituirt, so ist M_2 in der Umgebung des Punktes $v = 0$ gleich dem Producte aus $v^{\beta-\varrho+1}$ und einer eindeutigen stetigen Function von v. Man setze fest, dass v auch in diesem Falle die obige geschlossene Curve durchlaufen soll, die aus zwei Umläufen um den Punkt x und zwei Umläufen um den Punkt 0 besteht. Dann gelten die früheren Schlüsse, und es ergiebt sich, dass das Integral

$$\int_c^{(x,0,x-,0-)} (v-x)^{-\beta} v^{\beta-\varrho} \zeta_2 \, dv \tag{40.}$$

ebenfalls die Differentialgleichung (15.) befriedigt.

In (39.) kann man an Stelle von ζ_1 das Integral

$$\int_{-\infty}^{(v,0)} e^u (u-v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho} \, du$$

einführen. Dasselbe wird niemals illusorisch und stimmt (s. (25.)) mit ζ_1 bis auf einen constanten Factor überein. Auf diese Weise findet man das Doppelintegral

$$\int_c^{(x,0,x-,0-)} dv \int_{-\infty}^{(v,0)} \Phi(u, v, x) \, du, \tag{41.}$$

welches für beliebige Werthe der Constanten α, β, ϱ, σ convergirt, als eine particuläre Lösung der Gleichung (15.). Durch $\Phi(u, v, x)$ wird wiederum die Function (27.) bezeichnet.

Das Integral

$$\int_0^v e^u (u-v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho} \, du,$$

das (nach (23.)) gleich dem Product aus ζ_2 und einer Constanten ist, hört auf, einen bestimmten Sinn zu haben, sobald eine der Zahlen $\sigma-\alpha$, $\alpha-\varrho+1$ im reellen Theil negativ wird; dasselbe ist also hier, wo allgemeingültige Integralausdrücke aufgesucht werden sollen, nicht anwendbar. Wählt man aber für u einen geschlossenen Integrationsweg, der von einem beliebigen Punkte c_1 ausgeht und sich aus einem positiven Umlauf um v, einem positiven Umlauf um 0, einem negativen Umlauf um v und einem negativen Umlauf um 0 (die Umläufe in dieser Reihenfolge genommen) zusammensetzt, so

convergirt das hierdurch definirte Integral

$$(42.)\qquad \overline{\int_{c_1}}^{(v,0,v-,0-)} e^u (u-v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho} du$$

für beliebige Werthe von α, ϱ, σ und unterscheidet sich von ζ_2 ebenfalls nur durch einen constanten Factor*). Das Doppelintegral

$$(43.)\qquad \overline{\int_c}^{(x,0,x-,0-)} dv \overline{\int_c}^{(v,0,v-,0-)} \Phi(u,v,x)du,$$

welches aus (40.) entsteht, wenn ζ_2 durch das Integral (42.) ersetzt wird, ist demnach ein stets convergentes particuläres Integral der Differentialgleichung (15.).

Lässt man ferner in (34.) die Variable u nicht den Weg von 0 bis v, sondern den obigen Doppelumlauf um die Punkte 0 und v ausführen, so ergiebt sich das Integral

$$(44.)\qquad \lim_{(p=x)} \overline{\int_{-p}}^{(0,x)} dv \overline{\int_{c_1}}^{(v,0,v-,0-)} \Phi(u,v,x)du,$$

das der Gleichung (15.) genügt und einen bestimmten Sinn behält, welche Werthe auch die Constanten α, β, ϱ, σ annehmen mögen.

Die Entwickelung der Integrale (41.), (43.), (44.) nach steigenden Potenzen von x geschieht in derselben Weise und mit Hülfe derselben Substitutionen, wie bei den entsprechenden Integralen (29.), (28.), (34.). Die Reihen, die hierdurch erhalten werden, unterscheiden sich von den in (33.), (31.), (35.) angeführten Ausdrücken nur durch die Constanten, mit denen die F-Reihen multiplicirt sind. Statt der *Euler*schen Integrale erster Art

$$E(\alpha-\varrho+1,\sigma-\alpha),\quad E(\beta-\varrho+1,1-\beta),\quad E(\beta-\sigma+1,1-\beta),\quad E(\alpha,\sigma-\alpha),$$

die auf den rechten Seiten von (31.), (33.), (35.) stehen, treten jetzt die correspondirenden Integrale

$$\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\sigma-\alpha),\quad \mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,1-\beta),\quad \mathfrak{E}(\beta-\sigma+1,1-\beta),\quad \mathfrak{E}(\alpha,\sigma-\alpha)$$

als constante Factoren auf. Unter $\mathfrak{E}(p,q)$ wird das (stets convergente) Integral

$$\mathfrak{E}(p,q) = e^{-\pi i(p+q)} \overline{\int_c}^{(1,0,1-,0-)} u^{p-1}(1-u)^{q-1} du$$

---

*) Cfr. Gleichung (30.) der erwähnten Abhandlung „Ueber die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten", Math. Annal., Bd. 36.

verstanden*), dessen Integrationsweg einen Doppelumlauf um die Punkte 0 und 1 darstellt, und das im Falle positiver p, q mit dem *Euler*schen Integral $E(p, q)$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{E}(p, q) = (e^{\pi i p} - e^{-\pi i p})(e^{\pi i q} - e^{-\pi i q})E(p, q) = -4\sin(\pi p)\sin(\pi q)E(p, q)$$

verbunden ist.

Diesen auf die Gleichung (15.) bezüglichen Betrachtungen soll nur noch die Bemerkung hinzugefügt werden, dass man die Bedingung (7.)

$$[M_2]_{v=h_2} - [M_2]_{v=g_2} = 0$$

auch durch die Werthe $g_2 = h_2 = x$ oder $g_2 = h_2 = 0$ erfüllen kann, ersteres im Falle $\beta+2<0$, letzteres im Falle $\beta-\varrho+1>0$, resp. $\beta-\sigma+1>0$. In Folge dessen sind, unter den angegebenen Voraussetzungen, auch einfache geschlossene Curven, welche von einem der beiden singulären Punkte x, 0 ausgehen und den anderen umschliessen, in (10.) als Integrationsweg für die Variable v anwendbar. Es werden dann, als particuläre Lösungen der Differentialgleichung (15.), Doppelintegrale erhalten, in deren Entwickelung (nach steigenden Potenzen von x) constante Integrale von der Form**)

$$\bar{E}(p, q) = \int_0^{\overline{(1)}} u^{p-1}(u-1)^{q-1}du$$

als Multiplicatoren der F-Reihen vorkommen.

Im Vorhergehenden ist mit Hülfe der Substitution (10.) die Integration der Differentialgleichung (15.) auf die Lösung der ähnlich gestalteten Differentialgleichung (12.), deren Ordnung um eine Einheit niedriger ist, zurückgeführt worden. Dieses Verfahren kann auf die entsprechenden Gleichungen höherer Ordnung übertragen werden. Die Differentialgleichung vierter Ordnung, welche sich durch eine Substitution von der Form (10.) auf die Gleichung (15.) reduciren lässt, lautet

$$(45.)\quad x^3\frac{d^4y}{dx^4} = \begin{cases} x^2[x-(R_1+3)]\dfrac{d^3y}{dx^3} + x[(A_1+3)x-(R_2+R_1+1)]\dfrac{d^2y}{dx^2} \\ \qquad +[(A_2+A_1+1)x-R_3]\dfrac{dy}{dx} + A_3y, \end{cases}$$

*) Cfr. § 1 der Abh. „Zur Theorie der *Euler*schen Integrale" im 35. Bande der Math. Annalen, S. 495.

**) Cfr. § 2 der erwähnten Abhandlung „Zur Theorie der *Euler*schen Integrale".

wo zur Abkürzung

$$\begin{cases} A_1 = \alpha+\beta+\gamma, & A_2 = \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta, & A_3 = \alpha\beta\gamma, \\ R_1 = \varrho+\sigma+\tau, & R_2 = \sigma\tau+\tau\varrho+\varrho\sigma, & R_3 = \varrho\sigma\tau \end{cases}$$

gesetzt ist. Der Gleichung (45.) genügen dreifache bestimmte Integrale von der Form

$$\int dw \int dv \int \Phi(u, v, w, x)\, du,$$

in denen die Integrationswege der Variablen u, v, w ähnlich wie bei den Integralen (28.), (29.), (34.), resp. (41.), (43.), (44.) gebildet sind, während $\Phi(u, v, w, x)$ die Function

$$(w-x)^{-\gamma} w^{\gamma-\tau} (v-w)^{\tau-\beta-1} v^{\beta-\sigma} e^u (u-v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho}$$

bedeutet. Auf die Gleichung (45.) kommt wiederum die Differentialgleichung fünfter Ordnung

$$x^4 \frac{d^5y}{dx^5} = \begin{cases} x^3[x-(R_1+6)]\dfrac{d^4y}{dx^4} + x^2[(A_1+6)x-(R_2+3R_1+7)]\dfrac{d^3y}{dx^3} \\ +x[(A_2+3A_1+7)x-(R_3+R_2+R_1+1)]\dfrac{d^2y}{dx^2} \\ +[(A_3+A_2+A_1+1)x-R_4]\dfrac{dy}{dx} + A_4 y \end{cases}$$

zurück, in der A_1, R_1, etc. die Constanten

$$A_1 = \alpha+\beta+\gamma+\delta, \quad A_2 = \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta,$$
$$A_3 = \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta, \quad A_4 = \alpha\beta\gamma\delta,$$
$$R_1 = \varrho+\sigma+\tau+\omega, \quad R_2 = \varrho\sigma+\varrho\tau+\varrho\omega+\sigma\tau+\sigma\omega+\tau\omega,$$
$$R_3 = \varrho\sigma\tau+\varrho\sigma\omega+\varrho\tau\omega+\sigma\tau\omega, \quad R_4 = \varrho\sigma\tau\omega$$

bedeuten. Dieselbe wird, wenn man $\Phi(u, v, w, t, x)$ die Function

$$(t-x)^{-\delta} t^{\delta-\omega} (w-t)^{\omega-\gamma-1} w^{\gamma-\tau} (v-w)^{\tau-\beta-1} v^{\beta-\sigma} e^u (u-v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho}$$

nennt, durch vierfache bestimmte Integrale

$$\int dt \int dw \int dv \int \Phi(u, v, w, t, x)\, du,$$

deren Integrationswege den oben genannten analog sind, befriedigt.

In der Gleichung (45.) kommen als numerische Coefficienten (in den Factoren der einzelnen Differentialquotienten von y) nur die Zahlen 1 und



3 vor, in der obigen Differentialgleichung fünfter Ordnung die Zahlen 1, 3, 6, 7. Es zeigt sich, dass bei den entsprechenden Differentialgleichungen höherer Ordnung die nämlichen ganzzahligen Constanten auftreten, die in der Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe (mit zwei endlichen singulären Punkten) enthalten sind. In der bereits genannten Abhandlung, deren Gegenstand die letztere Differentialgleichung ist (Bd. 102 dieses Journals, S. 76) hat der Verfasser jene ganzzahligen Coefficienten, die aus der Theorie der analytischen Facultäten stammen, durch $d_m^{(p)}$ bezeichnet und (l. c. § 8) die hauptsächlich in Betracht zu ziehenden Eigenschaften derselben entwickelt. Die daselbst angewendete Bezeichnung soll hier beibehalten werden. Indem man festsetzt, dass $[z]_m$ die ganze Function $m$ten Grades von z

$$[z]_m = z(z-1)(z-2)\dots(z-m+1) \tag{46.}$$

bedeuten soll, definirt man für $m \leqq p$ die Zahlen $d_m^{(p)}$ durch die Identität

$$z^p = d_0^{(p)}+d_1^{(p)}[z-1]_1+d_2^{(p)}[z-1]_2+\dots+d_m^{(p)}[z-1]_m+\dots+d_p^{(p)}[z-1]_p. \tag{47.}$$

Die Zahlen m und p werden als ganz und positiv (einschliesslich des Werthes 0) vorausgesetzt. Es ist $d_0^{(p)} = d_p^{(p)} = 1$. Für $m = 1$ entsteht aus $d_m^{(p)}$ die Zahlenreihe 1, 3, 7, 15 etc., für $m = 2$ die Reihe 1, 6, 25, 90 etc. Sobald $m > p$ ist, nimmt $d_m^{(p)}$ den Werth Null an.

Es wird ferner, wie in der angeführten Arbeit, unter $[z]_m^+$ der Ausdruck

$$[z]_m^+ = z(z+1)(z+2)\dots(z+m-1) \tag{48.}$$

verstanden, und $[z]_0 = [z]_0^+ = 1$ gesetzt. Die in der Einleitung angegebene Reihe (1.) kann dann kurz als die Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{[\alpha_1]_\nu^+[\alpha_2]_\nu^+\dots[\alpha_{n-1}]_\nu^+}{[1]_\nu^+[\varrho_1]_\nu^+[\varrho_2]_\nu^+\dots[\varrho_{n-1}]_\nu^+}\, x^\nu$$

geschrieben werden.

§ 3.

Es soll nunmehr die zu (12.), (15.), (45.) analoge Differentialgleichung $n$ter Ordnung behandelt werden, die durch die eindeutige Function (1.) befriedigt wird, und deren mehrdeutige Integrale sich nur im Punkte $x = 0$ verzweigen. Die auf diese Gleichung bezüglichen Rechnungen sind

denen ähnlich, welche in der erwähnten Abhandlung des Verfassers „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten" (dieses Journal, Bd. 102) enthalten sind. Es wird daher, um Wiederholungen zu vermeiden, vielfach auf diese Arbeit verwiesen werden; dieselbe wird im Folgenden kurz durch Abh. bezeichnet.

Man geht (wie in § 9 der Abh.) von der Differentialgleichung

$$(49.)\quad \left\{\begin{aligned} & f_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+[(\alpha+n-1)_1f_n'(x)-f_{n-1}(x)]\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \\ & \quad +[(\alpha+n-1)_2f_n''(x)-(\alpha+n-2)_1f_{n-1}'(x)+f_{n-2}(x)]\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots \\ & \cdots+[(\alpha+n-1)_{n-\nu}f_n^{(n-\nu)}(x)-(\alpha+n-2)_{n-\nu-1}f_{n-1}^{(n-\nu-1)}(x)+\cdots \\ & \qquad\qquad \cdots\pm(\alpha+\nu)_1f_{\nu+1}'(x)\mp f_\nu(x)]\frac{d^\nu y}{dx^\nu} \\ & + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & +[(\alpha+n-1)_{n-1}f_n^{(n-1)}(x)-(\alpha+n-2)_{n-2}f_{n-1}^{(n-2)}(x)+\cdots \\ & \qquad\qquad \cdots+(-1)^{n-2}(\alpha+1)_1f_2'(x)+(-1)^{n-1}f_1(x)]\frac{dy}{dx} \\ & +[(\alpha+n-1)_nf_n^{(n)}(x)-(\alpha+n-2)_{n-1}f_{n-1}^{(n-1)}(x)+\cdots \\ & \qquad\qquad \cdots+(-1)^{n-2}(\alpha+1)_2f_2''(x)+(-1)^{n-1}(\alpha)_1f_1'(x)]y = 0 \end{aligned}\right.$$

aus, in welcher α als eine Constante, und $f_k(x)$ für $k=1, 2, \dots n$ als eine ganze Function von x des $k$ten oder eines niedrigeren Grades definirt wird. Für y werde das Integral

$$(50.)\qquad y = \int_g^h (t-x)^{-\alpha}\mathfrak{T}\,dt$$

substituirt, dessen untere Grenze g constant, und dessen obere Grenze h entweder constant oder gleich x ist. Es ergiebt sich, nach § 9 der Abh., dass das Integral (50.) der Differentialgleichung (49.) genügt, wenn die von t allein abhängige Function $\mathfrak{T}$ eine particuläre Lösung der Gleichung $(n-1)$ter Ordnung

$$(51.)\quad \frac{d^{n-1}(f_n(t)\mathfrak{T})}{dt^{n-1}}-\frac{d^{n-2}(f_{n-1}(t)\mathfrak{T})}{dt^{n-2}}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{d(f_2(t)\mathfrak{T})}{dt}+(-1)^{n-1}f_1(t)\mathfrak{T}=0$$

ist, und wenn gleichzeitig die Grenzen g, h der Bedingung

$$(52.)\qquad [M]_{t=h}-[M]_{t=g} = 0$$

unterworfen werden, in welcher M den Ausdruck

$$(53.)\quad \begin{cases} M = \sum_{k=2}^{k=n}(-1)^{n-k+1}[\alpha+1]_{k-2}^{+}(t-x)^{-\alpha-k+1}f_k(t)\mathfrak{T} \\ \quad +\sum_{k=3}^{k=n}(-1)^{n-k+1}[\alpha+1]_{k-3}^{+}(t-x)^{-\alpha-k+2}\frac{d(f_k(t)\mathfrak{T})}{dt}+\cdots \\ \quad \cdots+\sum_{k=n-1}^{k=n}(-1)^{n-k+1}[\alpha+1]_{k-n+1}^{+}(t-x)^{-\alpha-k+n-2}\frac{d^{n-3}(f_k(t)\mathfrak{T})}{dt^{n-3}} \\ \quad -(t-x)^{-\alpha-1}\frac{d^{n-2}(f_n(t)\mathfrak{T})}{dt^{n-2}} \end{cases}$$

bedeutet.

Man schreibe α_{n-1} statt α und wende, indem man durch ϱ_{n-1} eine weitere Constante bezeichnet, die Substitution

$$(54.)\quad \mathfrak{T} = t^{\alpha_{n-1}-\varrho_{n-1}}T$$

an, wodurch aus (50.) die Gleichung

$$(55.)\quad y = \int_g^h (t-x)^{-\alpha_{n-1}}t^{\alpha_{n-1}-\varrho_{n-1}}T\,dt$$

erhalten wird. Die Differenz $\alpha_{n-1}-\varrho_{n-1}$ nenne man kurz ε. Dann folgt aus (51.) und (54.) für die Grösse T die Differentialgleichung

$$(56.)\quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}(-1)^{n-\nu-1}\frac{d^\nu(t^\varepsilon f_{\nu+1}(t)T)}{dt^\nu}+(-1)^{n-1}t^\varepsilon f_1(t)T = 0.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass, wenn man die Functionen $f_1, \dots f_n$ derartig wählt, dass die Gleichung (56.) in eine zu (15.) und (45.) analoge Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung übergeht, die Gleichung (49.) sich in die entsprechende Differentialgleichung $n$ter Ordnung verwandelt. Mittelst Inductionsschlusses gelangt man dann zu einer Lösung der letzteren Gleichung durch $(n-1)$-fache bestimmte Integrale.

Die betreffende Differentialgleichung $n$ter Ordnung möge hier zunächst genannt werden. Man bezeichnet durch

$$A_1,\quad A_2,\quad \dots\quad A_{n-1},\quad R_1,\quad R_2,\quad \dots\quad R_{n-1}$$

$2n-2$ Constanten, welche mit $2n-2$ anderen Constanten

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \dots\quad \alpha_{n-1},\quad \varrho_1,\quad \varrho_2,\quad \dots\quad \varrho_{n-1}$$

durch die Gleichungen

$$(57.)\quad \begin{cases} A_1 = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}, & R_1 = \varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_{n-1}, \\ A_2 = \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}, & R_2 = \varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\cdots+\varrho_{n-2}\varrho_{n-1}, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ A_{n-1} = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}, & R_{n-1} = \varrho_1\varrho_2\dots\varrho_{n-1} \end{cases}$$

verbunden sind, so dass für ein beliebiges z die Identitäten

$$(z+\alpha_1)(z+\alpha_2)\dots(z+\alpha_{n-1}) = z^{n-1}+A_1z^{n-2}+A_2z^{n-3}+\cdots+A_{n-1},$$
$$(z+\varrho_1)(z+\varrho_2)\dots(z+\varrho_{n-1}) = z^{n-1}+R_1z^{n-2}+R_2z^{n-3}+\cdots+R_{n-1}$$

bestehen. Es seien ferner $Q_{n-1}(x)$, $Q_{n-2}(x)$, ... $Q_1(x)$ die linearen Functionen von x:

$$\begin{aligned} Q_{n-1}(x) &= x-[R_1+d_{n-3}^{(n-2)}], \\ Q_{n-2}(x) &= [A_1+d_{n-3}^{(n-2)}]x-[R_2+d_{n-4}^{(n-3)}R_1+d_{n-4}^{(n-2)}], \\ Q_{n-3}(x) &= [A_2+d_{n-4}^{(n-3)}A_1+d_{n-4}^{(n-2)}]x-[R_3+d_{n-5}^{(n-4)}R_2+d_{n-5}^{(n-3)}R_1+d_{n-5}^{(n-2)}], \\ &\dots\dots\dots \\ Q_2(x) &= [A_{n-3}+d_1^{(2)}A_{n-4}+d_1^{(3)}A_{n-5}+\cdots+d_1^{(n-3)}A_1+d_1^{(n-2)}]x \\ &\quad -[R_{n-2}+d_0^{(1)}R_{n-3}+d_0^{(2)}R_{n-4}+\cdots+d_0^{(n-3)}R_1+d_0^{(n-2)}], \\ Q_1(x) &= [A_{n-2}+d_0^{(1)}A_{n-3}+d_0^{(2)}A_{n-4}+\cdots+d_0^{(n-3)}A_1+d_0^{(n-2)}]x-R_{n-1}, \end{aligned}$$

woselbst unter $d_m^{(p)}$ die durch die Gleichung (47.) bestimmten ganzzahligen Coefficienten verstanden werden. Indem man der Symmetrie halber

$$(58.)\qquad A_0 = R_0 = 1,\quad Q_0 = A_{n-1}$$

setzt und die Gleichung $d_p^{(p)} = 1$ berücksichtigt, kann man, wenn $\nu>1$ ist, dem Ausdrucke $Q_\nu(x)$ die Gestalt

$$(59.)\qquad Q_\nu(x) = x\sum_{i=\nu}^{i=n-1} d_{\nu-1}^{(i-1)}A_{n-i-1}-\sum_{i=\nu}^{i=n} d_{\nu-2}^{(i-2)}R_{n-i}$$

geben. In $Q_1(x)$ hat der von x freie Term den Werth $-R_{n-1}$, der Coefficient von x stimmt mit dem in (59.) angeführten (für $\nu = 1$) überein. Nachdem die Functionen $Q_\nu(x)$ in dieser Weise definirt sind, bildet man die Differentialgleichung:

$$(60.)\quad x^{n-1}\frac{d^ny}{dx^n} = \begin{cases} x^{n-2}Q_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+x^{n-3}Q_{n-2}(x)\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots \\ \cdots+xQ_2(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+Q_1(x)\dfrac{dy}{dx}+Q_0y. \end{cases}$$

Für $n = 4$ wird dieselbe mit der Gleichung (45.), für $n = 3$ mit der Glei-

chung (15.) identisch, und für $n=2$ geht sie, nachdem x mit v vertauscht ist, in die Differentialgleichung (12.) über.

Die Abhängigkeit der Coefficienten der Functionen $Q_\nu(x)$ von den Constanten (57.) lässt sich noch in anderer Weise darstellen. Multiplicirt man die Gleichung (47.) mit z und ersetzt p durch $p-1$, so hat man die Formel

$$z^p = d_0^{(p-1)}[z]_1+d_1^{(p-1)}[z]_2+\cdots+d_{\nu-1}^{(p-1)}[z]_\nu+\cdots+d_{p-1}^{(p-1)}[z]_p.$$

Aus letzterer folgt unmittelbar

$$z^{n-1}+A_1z^{n-2}+A_2z^{n-3}+\cdots+A_{n-p-1}z^p+\cdots+A_{n-2}z+A_{n-1}$$

$$= A_{n-1}+[z]_1\sum_{p=1}^{p=n-1}d_0^{(p-1)}A_{n-p-1}+[z]_2\sum_{p=2}^{p=n-1}d_1^{(p-1)}A_{n-p-1}+\cdots+[z]_\nu\sum_{p=\nu}^{p=n-1}d_{\nu-1}^{(p-1)}A_{n-p-1}+\cdots$$

$$\cdots+[z]_{n-2}\sum_{p=n-2}^{p=n-1}d_{n-3}^{(p-1)}A_{n-p-1}+[z]_{n-1}d_{n-2}^{(n-2)}.$$

Bestimmt man nun $2n-1$ Constanten

$$\mathfrak{a}_0,\quad \mathfrak{a}_1,\quad \mathfrak{a}_2,\quad \ldots\quad \mathfrak{a}_{n-1},\quad \mathfrak{r}_1,\quad \mathfrak{r}_2,\quad \ldots\quad \mathfrak{r}_{n-1}$$

durch die identischen Gleichungen

$$(61.)\quad \begin{cases} z^{n-1}+A_1z^{n-2}+\cdots+A_{n-2}z+A_{n-1} \\ = \mathfrak{a}_{n-1}[z]_{n-1}+\mathfrak{a}_{n-2}[z]_{n-2}+\cdots+\mathfrak{a}_2[z]_2+\mathfrak{a}_1[z]_1+\mathfrak{a}_0, \\ z^{n-1}+R_1z^{n-2}+\cdots+R_{n-2}z+R_{n-1} \\ = [z]_{n-1}+\mathfrak{r}_{n-1}[z]_{n-2}+\cdots+\mathfrak{r}_3[z]_2+\mathfrak{r}_2[z]_1+\mathfrak{r}_1, \end{cases}$$

so ist für $\nu=1, 2, \ldots n-1$, wie der Vergleich mit (59.) zeigt,

$$(59^a.)\qquad Q_\nu(x) = \mathfrak{a}_\nu x-\mathfrak{r}_\nu.$$

Denn durch $\mathfrak{a}_\nu$ wird dieselbe Summe bezeichnet, welche in (59.) den Coefficienten von x bildet; und die Constante

$$\mathfrak{r}_\nu = \sum_{p=\nu-1}^{p=n-1}d_{\nu-2}^{(p-1)}R_{n-p-1}$$

ist für $\nu>1$, wenn $p=i-1$ gesetzt wird, gleichlautend mit dem in (59.) vorkommenden Ausdruck

$$\mathfrak{r}_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n}d_{\nu-2}^{(i-2)}R_{n-i}.$$

Die Gleichung (59ᵃ.) gilt auch für $\nu=1$, da $\mathfrak{r}_1$ den Werth R_{n-1} hat. Ausserdem ist $\mathfrak{a}_0=A_{n-1}=Q_0$.

Die Differentialgleichung (56.) lässt sich für passende Werthe der Functionen $f_1, f_2, \ldots$ auf die Form der Gleichung (60.) bringen, wenn in

letzterer die Grössen n, x, y durch $n-1$, t, T ersetzt werden. Man nennt

$$A'_1,\quad A'_2,\quad \dots\quad A'_{n-2},\quad R'_1,\quad R'_2,\quad \dots\quad R'_{n-2}$$

und

$$\alpha'_1,\quad \alpha'_2,\quad \dots\quad \alpha'_{n-2},\quad \varrho'_1,\quad \varrho'_2,\quad \dots\quad \varrho'_{n-2}$$

zwei Gruppen von je $2n-4$ Constanten, zwischen welchen die zu (57.) analogen Beziehungen

$$(62.)\quad \begin{cases} A'_1 \ = \alpha'_1+\alpha'_2+\cdots+\alpha'_{n-2}, & R'_1 \ = \varrho'_1+\varrho'_2+\cdots+\varrho'_{n-2}, \\ A'_2 \ = \alpha'_1\alpha'_2+\alpha'_1\alpha'_3+\cdots+\alpha'_{n-3}\alpha'_{n-2}, & R'_2 \ = \varrho'_1\varrho'_2+\varrho'_1\varrho'_3+\cdots+\varrho'_{n-3}\varrho'_{n-2}, \\ \dots\dots & \dots\dots \\ A'_{n-2} = \alpha'_1\alpha'_2\dots\alpha'_{n-2}, & R'_{n-2} = \varrho'_1\varrho'_2\dots\varrho'_{n-2} \end{cases}$$

bestehen. Ferner sei $A'_0 = R'_0 = 1$. Durch $P_{n-2}(t)$, $P_{n-3}(t)$, $\dots$ $P_1(t)$ sollen lineare Functionen von t

$$(63.)\qquad P_\nu(t) = \beta_\nu t - \gamma_\nu$$

bezeichnet werden, deren Coefficienten β_1, γ_1, $\dots$ β_{n-2}, γ_{n-2} man durch die für ein beliebiges z gültigen Gleichungen

$$z^{n-2}+A'_1z^{n-3}+\cdots+A'_{n-3}z+A'_{n-2} = \beta_{n-2}[z]_{n-2}+\beta_{n-3}[z]_{n-3}+\cdots+\beta_2[z]_2+\beta_1[z]_1+\beta_0,$$
$$z^{n-2}+R'_1z^{n-3}+\cdots+R'_{n-3}z+R'_{n-2} = [z]_{n-2}+\gamma_{n-2}[z]_{n-3}+\cdots+\gamma_3[z]_2+\gamma_2[z]_1+\gamma_1$$

definirt. Nach der oben durchgeführten Rechnung (cfr. (59.), (61.), (59^a.)) ist für $\nu = 1, 2, \dots n-2$

$$(64.)\qquad \beta_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n-2} d_{\nu-1}^{(i-1)} A'_{n-i-2},\qquad \gamma_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n-1} d_{\nu-2}^{(i-2)} R'_{n-i-1},$$

mit der Ausnahme, dass γ_1 den Werth R'_{n-2} hat. Sodann sei $P_0 = \beta_0 = A'_{n-2}$; endlich setzt man $\gamma_{n-1} = 1$, welcher Werth aus (64.) für $\nu = n-1$ erhalten wird. Man stellt nun für die Function T die Differentialgleichung

$$(65.)\qquad t^{n-2}\frac{d^{n-1}T}{dt^{n-1}} = \begin{cases} t^{n-3}P_{n-2}(t)\dfrac{d^{n-2}T}{dt^{n-2}}+t^{n-4}P_{n-3}(t)\dfrac{d^{n-3}T}{dt^{n-3}}+\cdots \\ \cdots+tP_2(t)\dfrac{d^2T}{dt^2}+P_1(t)\dfrac{dT}{dt}+P_0T \end{cases}$$

auf und giebt den in (62.) genannten Constanten α'_1, ϱ'_1, $\dots$ α'_{n-2}, ϱ'_{n-2} die Werthe

$$(66.)\quad \begin{cases} \alpha'_1 = \alpha_1-\varrho_{n-1}+1, & \alpha'_2 = \alpha_2-\varrho_{n-1}+1, & \dots & \alpha'_{n-2} = \alpha_{n-2}-\varrho_{n-1}+1, \\ \varrho'_1 = \varrho_1-\varrho_{n-1}+1, & \varrho'_2 = \varrho_2-\varrho_{n-1}+1, & \dots & \varrho'_{n-2} = \varrho_{n-2}-\varrho_{n-1}+1. \end{cases}$$

Die Gleichung (65.) wird mit der Gleichung (56.) identificirt, wodurch die Functionen $f_1, \dots f_n$ eindeutig bestimmt sind. Nach Substitution der betreffenden Ausdrücke geht, wie gezeigt werden soll, die Gleichung (49.) in die Gleichung (60.) über.

Man multiplicire die Gleichung (65.), in welcher der links stehende Term auf die rechte Seite gebracht werden möge, mit $t^{\varepsilon+1}, = t^{a_{n-1}-\varrho_{n-1}+1}$, und setze hierauf die Coefficienten der einzelnen Ableitungen von T und der Grösse T den entsprechenden Coefficienten in (56.) gleich. Dies führt, da

$$\frac{d^\nu\{t^\varepsilon f_{\nu+1}(t)T\}}{dt^\nu} = \begin{cases} t^\varepsilon f_{\nu+1}(t)\dfrac{d^\nu T}{dt^\nu}+(\nu)_1\dfrac{d(t^\varepsilon f_{\nu+1}(t))}{dt}\dfrac{d^{\nu-1}T}{dt^{\nu-1}}+\cdots \\ +(\nu)_i\dfrac{d^{\nu-i}(t^\varepsilon f_{\nu+1}(t))}{dt^{\nu-i}}\dfrac{d^iT}{dt^i}+\cdots+\dfrac{d^\nu(t^\varepsilon f_{\nu+1}(t))}{dt^\nu}T \end{cases}$$

und $(\nu)_i = (\nu)_{\nu-i}$ ist, zu dem Gleichungssystem:

$$t^\varepsilon f_n(t) = -t^{\varepsilon+n-1},$$

$$(n-1)_1\frac{d(t^\varepsilon f_n(t))}{dt} - t^\varepsilon f_{n-1}(t) = \beta_{n-2}t^{\varepsilon+n-1}+\gamma_{n-2}t^{\varepsilon+n-2},$$

$$(n-1)_2\frac{d^2(t^\varepsilon f_n(t))}{dt^2} - (n-2)_1\frac{d(t^\varepsilon f_{n-1}(t))}{dt} + t^\varepsilon f_{n-2}(t) = \beta_{n-3}t^{\varepsilon+n-2}+\gamma_{n-3}t^{\varepsilon+n-3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left.\begin{aligned} &(n-1)_{k-1}\frac{d^{n-k}(t^\varepsilon f_n(t))}{dt^{n-k}} - (n-2)_{k-1}\frac{d^{n-k-1}(t^\varepsilon f_{n-1}(t))}{dt^{n-k-1}}+\cdots \\ &\cdots+(-1)^{n-k-1}(k)_{k-1}\frac{d(t^\varepsilon f_{k+1}(t))}{dt}+(-1)^{n-k}t^\varepsilon f_k(t) \end{aligned}\right\} = \beta_{k-1}t^{\varepsilon+k}+\gamma_{k-1}t^{\varepsilon+k-1},$$

etc.

Die letzte Gleichung des Systems entsteht für $k=1$ aus der erwähnten allgemeinen Gleichung, wenn unter γ_0 der Werth 0 verstanden wird. Durch Auflösung dieser Gleichungen ergiebt sich

$$f_n(t) = -t^{n-1}$$

und für $k = 1, 2, \dots n-1$

$$f_k(t) = B_kt^k - C_kt^{k-1},$$

wo durch B_k und C_k, wenn $k>1$ ist, die Constanten

$$B_k = \sum_{i=k}^{i=n-1}(-1)^{n-i}(i-1)_{i-k}[\varepsilon+i]_{i-k}\beta_{i-1},\quad C_k = \sum_{i=k}^{i=n}(-1)^{n-i}(i-1)_{i-k}[\varepsilon+i-1]_{i-k}\gamma_{i-1},$$



und durch B_1, C_1 die Constanten

$$B_1 = \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{n-i}[\varepsilon+i]_{i-1}\beta_{i-1}, \quad C_1 = \sum_{i=2}^{i=n}(-1)^{n-i}[\varepsilon+i-1]_{i-1}\gamma_{i-1}$$

bezeichnet werden. Der Beweis dieser Gleichungen ist identisch mit dem der Formeln (95.) der Abh., wenn in letzteren $\beta_{n-1} = 0$, $\gamma_{n-1} = 1$ genommen wird. Indem man auch hier β_{n-1} als den Werth 0 und, wie bereits erwähnt, γ_{n-1} als den Werth 1 definirt, kann man in dem Ausdruck von B_k die obere Summengrenze $i = n$ statt $i = n-1$ benutzen, worauf für $k = n$ die Werthe $B_n = 0$, $C_n = 1$ erhalten werden; d. h. die obige Gleichung für $f_k(t)$ giebt, wenn $k = n$ gesetzt wird, den richtigen Werth der Function $f_n(t)$ an. Es ist also für $k = 1, 2, \dots n$

$$f_k(t) = B_k t^k - C_k t^{k-1},$$

wo B_k, C_k die Constanten:

$$(67.)\quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} B_k = \sum_{i=k}^{i=n}(-1)^{n-i}(i-1)_{i-k}[\varepsilon+i]_{i-k}\beta_{i-1}, \\ C_k = \sum_{i=k}^{i=n}(-1)^{n-i}(i-1)_{i-k}[\varepsilon+i-1]_{i-k}\gamma_{i-1} \end{array}\right\} \text{ für } k>1, \\ B_1 = \sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{n-i}[\varepsilon+i]_{i-1}\beta_{i-1}, \quad C_1 = \sum_{i=2}^{i=n}(-1)^{n-i}[\varepsilon+i-1]_{i-1}\gamma_{i-1} \end{cases}$$

$(\varepsilon = \alpha_{n-1}-\varrho_{n-1})$ bedeuten.

Um die weiteren Rechnungen zu vereinfachen, transformirt man zunächst die Coefficienten β_ν, γ_ν. Es kommt hierbei die (in (65.) der Abh. erwähnte) Formel

$$(68.)\quad \sum_{k=r}^{k=s}\sum_{l=k}^{l=s}\varphi(k,l) = \sum_{l=r}^{l=s}\sum_{k=r}^{k=l}\varphi(k,l)$$

zur Anwendung, in welcher $\varphi(k, l)$ einen beliebigen, von den Summationsindices k, l abhängigen Ausdruck bezeichnet. Sind ferner $K_1, \dots K_m$, $L_1, \dots L_m$ die Ausdrücke

$$\begin{array}{ll} K_1 = \varkappa_1+\varkappa_2+\dots+\varkappa_m, & L_1 = \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_m, \\ K_2 = \varkappa_1\varkappa_2+\varkappa_1\varkappa_3+\dots+\varkappa_{m-1}\varkappa_m, & L_2 = \lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\dots+\lambda_{m-1}\lambda_m, \\ \dots & \dots \\ K_m = \varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_m, & L_m = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_m, \end{array}$$

und giebt man den Grössen $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_m$ die Werthe

$$\varkappa_1 = \lambda_1+\mathfrak{k}, \quad \varkappa_2 = \lambda_2+\mathfrak{k}, \quad \dots \quad \varkappa_m = \lambda_m+\mathfrak{k},$$

so besteht (cfr. (79.) der Abh.) für $\nu = 1, 2, \dots m$ die Formel

$$(69.)\qquad K_\nu = \begin{cases} L_\nu + (m-\nu+1)_1 \mathfrak{k} L_{\nu-1} + (m-\nu+2)_2 \mathfrak{k}^2 L_{\nu-2} + \cdots \\ \cdots + (m-2)_{\nu-2} \mathfrak{k}^{\nu-2} L_2 + (m-1)_{\nu-1} \mathfrak{k}^{\nu-1} L_1 + (m)_\nu \mathfrak{k}^\nu. \end{cases}$$

Man bestimmt nun $2n-4$ Constanten $\alpha_1'', \dots \alpha_{n-2}'', \varrho_1'', \dots \varrho_{n-2}''$ durch die Gleichungen

$$\alpha_1' = \alpha_1''+1, \quad \alpha_2' = \alpha_2''+1, \quad \dots \quad \alpha_{n-2}' = \alpha_{n-2}''+1,$$
$$\varrho_1' = \varrho_1''+1, \quad \varrho_2' = \varrho_2''+1, \quad \dots \quad \varrho_{n-2}' = \varrho_{n-2}''+1,$$

und nennt

$$\begin{array}{ll} A_0'' = 1, & R_0'' = 1, \\ A_1'' = \alpha_1''+\alpha_2''+\cdots+\alpha_{n-2}'', & R_1'' = \varrho_1''+\varrho_2''+\cdots+\varrho_{n-2}'', \\ A_2'' = \alpha_1''\alpha_2''+\alpha_1''\alpha_3''+\cdots+\alpha_{n-3}''\alpha_{n-2}'', & R_2'' = \varrho_1''\varrho_2''+\varrho_1''\varrho_3''+\cdots+\varrho_{n-3}''\varrho_{n-2}'', \\ \dots\dots & \dots\dots \\ A_{n-2}'' = \alpha_1''\alpha_2''\dots\alpha_{n-2}'', & R_{n-2}'' = \varrho_1''\varrho_2''\dots\varrho_{n-2}''. \end{array}$$

Dann folgen aus der Gleichung (69.), in der $\mathfrak{k} = 1$, $m = n-2$ gesetzt wird, die Gleichungen

$$A_{n-i-2}' = A_{n-i-2}''+(i+1)_1 A_{n-i-3}''+(i+2)_2 A_{n-i-4}''+\cdots+(n-3)_{n-i-3} A_1''+(n-2)_{n-i-2} A_0'',$$
$$R_{n-i-1}' = R_{n-i-1}''+(i)_1 R_{n-i-2}''+(i+1)_2 R_{n-i-3}''+\cdots+(n-3)_{n-i-2} R_1''+(n-2)_{n-i-1} R_0''.$$

Durch Substitution der Werthe von A_{n-i-2}' und R_{n-i-1}' in die Gleichungen (64.) und Benutzung der Formel (68.) gewinnt man für β_ν und γ_ν die Ausdrücke

$$(70.)\qquad \beta_\nu = \sum_{\lambda=\nu}^{\lambda=n-2} d_\nu^{(\lambda)} A_{n-\lambda-2}'', \quad \gamma_\nu = \sum_{\lambda=\nu}^{\lambda=n-1} d_{\nu-1}^{(\lambda-1)} R_{n-\lambda-1}''.$$

Die auf γ_ν bezügliche Rechnung ist genau gleichlautend mit der in der Abh. enthaltenen (l. c. (96.)), und die obige Gleichung für β_ν ergiebt sich aus der dort durchgeführten Entwickelung, wenn n durch $n-1$ ersetzt wird.

Die Grössen $\beta_0, \gamma_1, \gamma_{n-1}$ sind im Vorhergehenden als die Constanten

$$\beta_0 = P_0 = A_{n-2}', \quad \gamma_1 = R_{n-2}', \quad \gamma_{n-1} = 1$$

definirt worden. Man erkennt leicht, dass diese drei Gleichungen in (70.) enthalten sind. Denn für β_0 und γ_1 erhält man, da $d_0^{(p)} = 1$ ist, aus (70.) die Werthe

$$\beta_0 = A_{n-2}''+A_{n-3}''+\cdots+A_0'', \quad \gamma_1 = R_{n-2}''+R_{n-3}''+\cdots+R_0'',$$

welche gleich A'_{n-2}, R'_{n-2} sind, für γ_{n-1} den Werth $d_{n-2}^{(n-2)} R''_0$, $=1$. Die Constanten β_{n-1} und γ_0 bedeuten, wie oben angegeben wurde, den Werth 0.

Zwischen den Constanten α''_1, ϱ''_1, ... α''_{n-2}, ϱ''_{n-2} und α_1, ϱ_1, ... α_{n-2}, ϱ_{n-2} bestehen in Folge der Gleichungen (66.) die Relationen

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha''_1 + \varrho_{n-1}, & \alpha_2 = \alpha''_2 + \varrho_{n-1}, & \ldots & \alpha_{n-2} = \alpha''_{n-2} + \varrho_{n-1}, \\ \varrho_1 = \varrho''_1 + \varrho_{n-1}, & \varrho_2 = \varrho''_2 + \varrho_{n-1}, & \ldots & \varrho_{n-2} = \varrho''_{n-2} + \varrho_{n-1}. \end{cases}$$

Bezeichnet man also durch $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, ... $\mathfrak{A}_{n-2}$, $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_1$, ... $\mathfrak{R}_{n-2}$ die Werthe

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{A}_0 \;\; = 1, & \mathfrak{R}_0 \;\; = 1, \\ \mathfrak{A}_1 \;\; = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-2}, & \mathfrak{R}_1 \;\; = \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_{n-2}, \\ \mathfrak{A}_2 \;\; = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-3}\alpha_{n-2}, & \mathfrak{R}_2 \;\; = \varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \cdots + \varrho_{n-3}\varrho_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{A}_{n-2} = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}, & \mathfrak{R}_{n-2} = \varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-2}, \end{array}$$

so führt die Formel (69.) zu den Gleichungen:

$$\mathfrak{A}_{n-i} = A''_{n-i} + (i-1)_1 \varrho_{n-1} A''_{n-i-1} + (i)_2 \varrho^2_{n-1} A''_{n-i-2} + \cdots$$
$$\cdots + (n-3)_{n-i-1} \varrho^{n-i-1}_{n-1} A''_1 + (n-2)_{n-i} \varrho^{n-i}_{n-1} A''_0,$$
$$\mathfrak{R}_{n-i} = R''_{n-i} + (i-1)_1 \varrho_{n-1} R''_{n-i-1} + (i)_2 \varrho^2_{n-1} R''_{n-i-2} + \cdots$$
$$\cdots + (n-3)_{n-i-1} \varrho^{n-i-1}_{n-1} R''_1 + (n-2)_{n-i} \varrho^{n-i}_{n-1} R''_0.$$

Aus (57.) folgt sodann

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} A_i = \mathfrak{A}_i - \alpha_{n-1}\mathfrak{A}_{i-1}, \\ R_i = \mathfrak{R}_i - \varrho_{n-1}\mathfrak{R}_{i-1} \end{array}\right\} \text{ für } i = 1, 2, \ldots n-2, \\ A_{n-1} = \alpha_{n-1}\mathfrak{A}_{n-2}, \quad R_{n-1} = \varrho_{n-1}\mathfrak{R}_{n-2}. \end{cases}$$

Indem man für $\mathfrak{R}_1$, ... $\mathfrak{R}_{n-2}$ die soeben erwähnte Identität benutzt, erhält man die Gleichungen

$$(71.) \quad \begin{cases} R_{n-i} \;\; = R''_{n-i} - (i)_1 \varrho_{n-1} R''_{n-i-1} - (i-1)_2 \varrho^2_{n-1} R''_{n-i-2} + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots - (n-1)_{n-i} \varrho^{n-i}_{n-1}, \quad \text{wenn} \quad i > 1, \\ R_{n-1} \;\; = \varrho_{n-1} R_{n-2} - \varrho^2_{n-1} R_{n-3} - \cdots - \varrho^{n-2}_{n-1} R_1 - \varrho^{n-1}_{n-1}. \end{cases}$$

Der Nachweis, dass durch die Substitution der Werthe

$$a = a_{n-1}, \quad f_i(x) = B_i x^i - C_i x^{i-1},$$

wo B_i, C_i die Constanten (67.) sind, die Gleichung (49.) sich in die Gleichung (69.) verwandelt, stimmt mit dem entsprechenden Beweise für die

genannte hypergeometrische Differentialgleichung $n$ter Ordnung fast vollständig überein. Die Gleichung (49.) nimmt zunächst die Form

$$x^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} x^{\nu-1}\psi_\nu(x)\frac{d^\nu y}{dx^\nu} + \psi_0 y$$

an, wo $\psi_\nu(x)$ für $\nu = 1, 2, \dots n-1$ die lineare Function

$$\psi_\nu(x) = D_\nu x - E_\nu$$

bedeutet, deren Coefficienten gleich den Summen

$$D_\nu = \sum_{k=\nu}^{k=n}(-1)^{n-k}(\alpha_{n-1}+k-1)_{k-\nu}[k]_{k-\nu}B_k,$$

$$E_\nu = \sum_{k=\nu}^{k=n}(-1)^{n-k}(\alpha_{n-1}+k-1)_{k-\nu}[k-1]_{k-\nu}C_k$$

sind, während unter ψ_0 die Constante

$$\psi_0 = \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^{n-k}(\alpha_{n-1}+k-1)_k[k]_k B_k$$

verstanden wird. Wie aus dem Vergleiche mit (60.) hervorgeht, hat man zu zeigen, dass für $\nu = 1, 2, \dots n-1$ die Function $\psi_\nu(x)$ mit der Function $Q_\nu(x)$, und die Constante ψ_0 mit Q_0 identisch ist.

Unter den Coefficienten E_ν erfordert der Werth E_1 eine besondere Behandlung. Man findet durch genau dieselbe Rechnung wie im § 10 der Abh. (wo die Coefficienten der linearen Functionen ebenfalls D_ν, E_ν heissen) für $\nu > 1$

$$E_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n} d_{\nu-2}^{(i-2)} \sum_{\mu=i}^{\mu=n}(\mu-1)_{\mu-i}\varrho_{n-1}^{\mu-i}R''_{n-\mu},$$

und

$$E_1 = \varrho_{n-1}\{R''_{n-2} + \varrho_{n-1}R''_{n-3} + \varrho_{n-1}^2 R''_{n-4} + \cdots + \varrho_{n-1}^{n-3}R''_1 + \varrho_{n-1}^{n-2}\}$$

oder, wegen der Formeln (71.),

$$E_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n} d_{\nu-2}^{(i-2)}R_{n-i} \quad \text{für} \quad \nu > 1, \quad E_1 = R_{n-1}.$$

Die Umformung, der man die Coefficienten D_ν unterzieht, ist in ihrem ersten Theil mit den entsprechenden Rechnungen der Abh. gleichlautend, wenn α_n durch α_{n-1}, und β_{n-1} durch den Werth 0 ersetzt wird. Man erhält auf diese Weise zunächst die Gleichung

$$D_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n-1}(i-1)_{i-\nu}[\varrho_{n-1}]_{i-\nu}\beta_{i-1} + \alpha_{n-1}\sum_{i=\nu+1}^{i=n-1}(i-1)_{i-\nu-1}[\varrho_{n-1}-1]_{i-\nu-1}\beta_{i-1}.$$

Werden in die rechte Seite derselben die Werthe (70.) für die Constanten

β_{i-1} substituirt, so ergiebt sich für D_ν ein Ausdruck, welcher dem in der Abh. vorkommenden analog ist, jedoch die Zahl $n-1$, statt n, als obere Summengrenze enthält. Indem man die nämlichen Formeln wie bei jener Entwickelung benutzt, gelangt man zu der Gleichung

$$D_\nu = d_{\nu-1}^{(n-2)} + \sum_{i=\nu}^{i=n-2} d_{\nu-1}^{(i-1)}(\mathfrak{A}_{n-i-1} + \alpha_{n-1}\mathfrak{A}_{n-i-2}) = \sum_{i=\nu}^{i=n-1} d_{\nu-1}^{(i-1)} A_{n-i-1}.$$

Hiermit ist (cfr. (59.)) die Uebereinstimmung der Functionen $Q_\nu(x)$ und $\psi_\nu(x)$ bewiesen.

In ähnlicher Weise findet man

$$\psi_0 = \alpha_{n-1}\sum_{i=1}^{i=n-1} [\varrho_{n-1}-1]_{i-1}\beta_{i-1}$$

oder, wenn für die Grössen β_{i-1} die Ausdrücke (70.) eingesetzt werden,

$$\psi_0 = \alpha_{n-1}\sum_{\mu=1}^{\mu=n-1} A''_{n-\mu-1}\sum_{i=1}^{i=\mu} d_{i-1}^{(\mu-1)}[\varrho_{n-1}-1]_{i-1} = \alpha_{n-1}\sum_{\mu=1}^{\mu=n-1} A''_{n-\mu-1}\varrho_{n-1}^{\mu-1}$$

(cfr. (47.)), woraus nach Berücksichtigung der oben erwähnten Formel für $\mathfrak{A}_{n-2}$ die Gleichung

$$\psi_0 = \alpha_{n-1}\mathfrak{A}_{n-2} = A_{n-1} = Q_0$$

entsteht.

Die Gleichung (49.) geht demnach für die genannten Werthe der Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$, wenn gleichzeitig $\alpha = \alpha_{n-1}$ gesetzt wird, in die Gleichung (60.) über. Hieraus ergiebt sich die weitere Folgerung, dass das bestimmte Integral (55.), sobald für T eine Lösung der Differentialgleichung (65.) substituirt wird, und die Grenzen g, h der Bedingung (52.) genügen, ein particuläres Integral der Differentialgleichung (60.) darstellt.

§ 4.

Wird die Gleichung (60.) durch eine Potenzreihe von der Form

$$y = c_0x^\lambda + c_1x^{\lambda+1} + \cdots + c_kx^{\lambda+k} + \cdots$$

integrirt, so nimmt bei Anwendung der Bezeichnung (46.) diejenige Gleichung, welche den Anfangsexponenten λ bestimmt, die Gestalt

$$[\lambda]_n + \mathfrak{r}_{n-1}[\lambda]_{n-1} + \mathfrak{r}_{n-2}[\lambda]_{n-2} + \cdots + \mathfrak{r}_\nu[\lambda]_\nu + \cdots + \mathfrak{r}_2[\lambda]_2 + \mathfrak{r}_1[\lambda]_1 = 0$$

oder

$$\lambda\{[\lambda-1]_{n-1} + \mathfrak{r}_{n-1}[\lambda-1]_{n-2} + \cdots + \mathfrak{r}_\nu[\lambda-1]_{\nu-1} + \cdots + \mathfrak{r}_2[\lambda-1]_1 + \mathfrak{r}_1\} = 0$$

an. Aus (61.) folgt aber für $z = \lambda-1$, wenn zugleich die Beziehungen

zwischen den Constanten $R_1, \dots R_{n-1}$ und $\varrho_1, \dots \varrho_{n-1}$ beachtet werden, die Identität

$$[\lambda-1]_{n-1}+\mathfrak{r}_{n-1}[\lambda-1]_{n-2}+\dots+\mathfrak{r}_2[\lambda-1]_1+\mathfrak{r}_1 = (\lambda-1+\varrho_1)(\lambda-1+\varrho_2)\dots(\lambda-1+\varrho_{n-1}).$$

Also erhält man die Gleichung

$$\lambda(\lambda-1+\varrho_1)(\lambda-1+\varrho_2)\dots(\lambda-1+\varrho_{n-1}) = 0,$$

welche für λ die n Werthe

$$0,\quad 1-\varrho_1,\quad 1-\varrho_2,\quad \dots\quad 1-\varrho_{n-1}$$

liefert. Es besteht ferner zwischen je zwei auf einander folgenden Coefficienten c_k und c_{k+1} die Relation

$$\begin{aligned}(\lambda+k+1)\{[\lambda+k]_{n-1}+\mathfrak{r}_{n-1}[\lambda+k]_{n-2}+\mathfrak{r}_{n-2}[\lambda+k]_{n-3}+\dots+\mathfrak{r}_2[\lambda+k]_1+\mathfrak{r}_1\}c_{k+1}\\ = \{\mathfrak{a}_{n-1}[\lambda+k]_{n-1}+\mathfrak{a}_{n-2}[\lambda+k]_{n-2}+\mathfrak{a}_{n-3}[\lambda+k]_{n-3}+\dots+\mathfrak{a}_1[\lambda+k]_1+\mathfrak{a}_0\}c_k,\end{aligned}$$

woraus man nach Berücksichtigung der Gleichungen (61.), in denen $z=\lambda+k$ genommen wird, für c_{k+1} den Ausdruck

$$c_{k+1} = \frac{(\alpha_1+\lambda+k)(\alpha_2+\lambda+k)\dots(\alpha_{n-1}+\lambda+k)}{(\lambda+k+1)(\varrho_1+\lambda+k)(\varrho_2+\lambda+k)\dots(\varrho_{n-1}+\lambda+k)}\,c_k$$

ableitet. Hiernach ergeben sich, wenn durch $F(a_1, a_2, \dots a_m;\ r_1, r_2, \dots r_m;\ z)$ die unendliche Reihe

$$\text{(72.)}\quad \begin{cases} F(a_1,\ a_2,\ \dots\ a_m;\ \ r_1,\ r_2,\ \dots\ r_m;\ \ z)\\ = 1+\dfrac{a_1a_2\dots a_m}{1.r_1r_2\dots r_m}z+\dfrac{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)\dots a_m(a_m+1)}{1.2.r_1(r_1+1)r_2(r_2+1)\dots r_m(r_m+1)}z^2+\cdots\end{cases}$$

bezeichnet wird, und die Grösse λ nach einander die oben genannten Werthe $0,\ 1-\varrho_1,\ 1-\varrho_2,\ \dots\ 1-\varrho_{n-1}$ annimmt, die n Functionen

$$\text{(73.)}\quad \begin{cases} F(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_{n-1};\ \ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \dots\ \varrho_{n-1};\ \ x),\\ x^{1-\varrho_1}F(\alpha_1-\varrho_1+1,\ \dots\ \alpha_{n-1}-\varrho_1+1;\\ \qquad 2-\varrho_1,\ \varrho_2-\varrho_1+1,\ \varrho_3-\varrho_1+1,\ \dots\ \varrho_{n-1}-\varrho_1+1;\ \ x),\\ x^{1-\varrho_2}F(\alpha_1-\varrho_2+1,\ \dots\ \alpha_{n-1}-\varrho_2+1;\\ \qquad 2-\varrho_2,\ \varrho_1-\varrho_2+1,\ \varrho_3-\varrho_2+1,\ \dots\ \varrho_{n-1}-\varrho_2+1;\ \ x),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x^{1-\varrho_{n-1}}F(\alpha_1-\varrho_{n-1}+1,\ \dots\ \alpha_{n-1}-\varrho_{n-1}+1;\\ \qquad 2-\varrho_{n-1},\ \varrho_1-\varrho_{n-1}+1,\ \dots\ \varrho_{n-2}-\varrho_{n-1}+1;\ \ x)\end{cases}$$

als particuläre Integrale der Differentialgleichung (60.). Die Reihen (73.) sind die Hauptlösungen dieser Gleichung, da sie durch Producte aus je einer eindeutigen Function und einer Potenz von x dargestellt werden.

In der Gleichung (65.), welche von derselben Form wie die Gleichung (60.) ist, treten die Werthe $n-1$, t, α'_1, ϱ'_1, ... an die Stelle der in (60.) vorkommenden Werthe n, x, α_1, ϱ_1, ... Man findet also die zu (73.) analogen Reihen

$$(74.)\quad \begin{cases} F(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_{n-2};\ \varrho'_1, \varrho'_2, \dots \varrho'_{n-2};\ t), \\ t^{1-\varrho'_1} F(\alpha'_1-\varrho'_1+1, \dots \alpha'_{n-2}-\varrho'_1+1; \\ \qquad\qquad 2-\varrho'_1, \varrho'_2-\varrho'_1+1, \dots \varrho'_{n-2}-\varrho'_1+1;\ t), \\ \dots\dots\dots\dots \\ t^{1-\varrho'_{n-2}} F(\alpha'_1-\varrho'_{n-2}+1, \dots \alpha'_{n-2}-\varrho'_{n-2}+1; \\ \qquad\qquad 2-\varrho'_{n-2}, \varrho'_1-\varrho'_{n-2}+1, \dots \varrho'_{n-3}-\varrho'_{n-2}+1;\ t) \end{cases}$$

als $n-1$ particuläre Lösungen der Differentialgleichung (65.). Die diesen Werthen von T correspondirenden Ausdrücke von $\mathfrak{T}$ sind nach (54.) und (66.), wenn die Function, die aus der ersten Reihe (74.) entsteht, zuletzt geschrieben wird, die folgenden:

$$(75.)\quad \begin{cases} t^{\alpha_{n-1}-\varrho_1} F(\alpha_1-\varrho_1+1, \dots \alpha_{n-2}-\varrho_1+1; \\ \qquad\qquad \varrho_2-\varrho_1+1, \varrho_3-\varrho_1+1, \dots \varrho_{n-1}-\varrho_1+1;\ t), \\ t^{\alpha_{n-1}-\varrho_2} F(\alpha_1-\varrho_2+1, \dots \alpha_{n-2}-\varrho_2+1; \\ \qquad\qquad \varrho_1-\varrho_2+1, \varrho_3-\varrho_2+1, \dots \varrho_{n-1}-\varrho_2+1;\ t), \\ \dots\dots\dots\dots \\ t^{\alpha_{n-1}-\varrho_{n-1}} F(\alpha_1-\varrho_{n-1}+1, \dots \alpha_{n-2}-\varrho_{n-1}+1; \\ \qquad\qquad \varrho_1-\varrho_{n-1}+1, \varrho_2-\varrho_{n-1}+1, \dots \varrho_{n-2}-\varrho_{n-1}+1;\ t). \end{cases}$$

Man substituire in die Gleichung (53.), in der $\alpha = \alpha_{n-1}$ zu nehmen ist, für $\mathfrak{T}$ nach (75.) den Werth

$$t^{\alpha_{n-1}-\varrho_\nu} F(\alpha_1-\varrho_\nu+1, \dots \alpha_{n-2}-\varrho_\nu+1; \\ \varrho_1-\varrho_\nu+1, \dots \varrho_{\nu-1}-\varrho_\nu+1, \varrho_{\nu+1}-\varrho_\nu+1, \dots \varrho_{n-1}-\varrho_\nu+1;\ t)$$

und entwickele auch die übrigen in (53.) vorkommenden Functionen von t nach steigenden Potenzen dieser Variable. Hierdurch ergiebt sich für M eine Reihe, in welcher der Exponent der Anfangspotenz gleich $\alpha_{n-1}-\varrho_\nu+1$ ist. Es soll nun vorausgesetzt werden, dass die Constanten $\alpha_{n-1}, \varrho_1, \dots \varrho_{n-1}$, falls sie reell sind, den n Ungleichheiten

$$(76.)\quad \alpha_{n-1}+n-1 < 0,\ \alpha_{n-1}-\varrho_1+1 > 0,\ \alpha_{n-1}-\varrho_2+1 > 0,\ \dots\ \alpha_{n-1}-\varrho_{n-1}+1 > 0$$

genügen, und dass, falls sie complex sind, die entsprechenden Ungleichheiten für ihre reellen Bestandtheile gelten. Dann verschwindet M für $t = 0$, welche der Functionen (75.) auch für $\mathfrak{T}$ gesetzt werden möge. Ferner ist

$M=0$ für $t=x$, da nach (76.) die Zahl $-\alpha_{n-1}-n+1$, welche den Exponenten der niedrigsten in (53.) vorkommenden Potenz von $t-x$ angiebt, im reellen Theil positiv ist. Die Gleichung (52.) wird also befriedigt, wenn man für g und h die Werthe 0 und x wählt. Hieraus folgt (nach § 3), dass das bestimmte Integral

$$(77.)\qquad \int_0^x (t-x)^{-\alpha_{n-1}} t^{\alpha_{n-1}-\varrho_{n-1}} T\,dt$$

eine particuläre Lösung der Gleichung (60.) ist, sobald die Function T der Differentialgleichung (65.) genügt.

Man definirt $\Phi(v_1, v_2, \dots v_{n-1}, x)$ als die Function

$$(v_{n-1}-x)^{-\alpha_{n-1}} v_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\varrho_{n-1}} (v_{n-2}-v_{n-1})^{\varrho_{n-1}-\alpha_{n-2}-1} v_{n-2}^{\alpha_{n-2}-\varrho_{n-2}}$$

$$.(v_{n-3}-v_{n-2})^{\varrho_{n-2}-\alpha_{n-3}-1} v_{n-3}^{\alpha_{n-3}-\varrho_{n-3}} \dots (v_2-v_3)^{\varrho_3-\alpha_2-1} v_2^{\alpha_2-\varrho_2} (v_1-v_2)^{\varrho_2-\alpha_1-1} v_1^{\alpha_1-\varrho_1} e^{v_1}$$

oder in kürzerer Schreibweise

$$(78.)\ \Phi(v_1, v_2, \dots v_{n-1}, x) = (v_{n-1}-x)^{-\alpha_{n-1}} v_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\varrho_{n-1}} e^{v_1} \prod_{k=1}^{k=n-2} (v_k-v_{k+1})^{\varrho_{k+1}-\alpha_k-1} v_k^{\alpha_k-\varrho_k}.$$

Dann erhält man als particuläre Lösung der Differentialgleichung (60.) zunächst das $(n-1)$-fache bestimmte Integral

$$(79.)\qquad \int_0^x dv_{n-1} \int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2} \int_0^{v_{n-2}} dv_{n-3} \dots \int_0^{v_2} \Phi(v_1,\ v_2,\ \dots\ v_{n-1},\ x)\,dv_1,$$

in welchem die Integration nach v_1 zuerst, die nach v_{n-1} zuletzt auszuführen ist. Für $n=2$ und für $n=3$ ist die Eigenschaft dieses Integrals, der Gleichung (60.) zu genügen, direct abgeleitet worden (cfr. (23.) und (28.)). Um den Beweis im allgemeinen Fall zu geben, wendet man einen Inductionsschluss an. Es werde vorausgesetzt, dass das dem Ausdruck (79.) entsprechende $(n-2)$-fache Integral

$$\int_0^t dv_{n-2} \int_0^{v_{n-2}} dv_{n-3} \int_0^{v_{n-3}} dv_{n-4} \dots \int_0^{v_2} \varphi(v_1,\ v_2,\ \dots\ v_{n-2},\ t)\,dv_1,$$

in welchem $\varphi(v_1, v_2, \dots v_{n-2}, t)$ die Function

$$(v_{n-2}-t)^{-\alpha'_{n-2}} v_{n-2}^{\alpha'_{n-2}-\varrho'_{n-2}} e^{v_1} \prod_{k=1}^{k=n-3} (v_k-v_{k+1})^{\varrho'_{k+1}-\alpha'_k-1} v^{\alpha'_k-\varrho'_k}$$

bedeutet, die Differentialgleichung (65.) befriedige. Dann darf dieses Integral an Stelle von T in (77.) eingeführt werden, so dass das $(n-1)$-fache Integral

$$\int_0^x dt \int_0^t dv_{n-2} \int_0^{v_{n-2}} dv_{n-3} \int_0^{v_{n-3}} dv_{n-4} \dots \int_0^{v_2} (t-x)^{-\alpha_{n-1}} t^{\alpha_{n-1}-\varrho_{n-1}} \varphi\,dv_1$$

eine Lösung von (60.) darstellt. Nach (66.) ist aber

$$-\alpha'_{n-2} = \varrho_{n-1}-\alpha_{n-2}-1, \quad \alpha'_k-\varrho'_k = \alpha_k-\varrho_k, \quad \varrho'_{k+1}-\alpha'_k-1 = \varrho_{k+1}-\alpha_k-1,$$

woraus, wenn v_{n-1} statt t gesetzt wird, die Identität

$$(v_{n-1}-x)^{-\alpha_{n-1}} v_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\varrho_{n-1}} \varphi(v_1,\, v_2,\, \dots\, v_{n-2},\, v_{n-1}) = \Phi(v_1,\, v_2,\, \dots\, v_{n-1},\, x)$$

folgt. Die Function (77.) geht also, wenn man für T das genannte $(n-2)$-fache Integral substituirt, in das Integral (79.) über. Demnach ist letzteres eine particuläre Lösung der Gleichung (60.).

Verbindet man die Variablen $v_1,\, v_2,\, \dots\, v_{n-1}$ mit neuen Variablen $t_1,\, t_2,\, \dots\, t_{n-1}$ durch die Gleichungen

$$v_1 = v_2 t_1, \quad v_2 = v_3 t_2, \quad \dots \quad v_{n-2} = v_{n-1} t_{n-2}, \quad v_{n-1} = x t_{n-1},$$

aus denen sich die Werthe

$$v_k = t_k t_{k+1} \dots t_{n-1} x, \quad dv_k = t_{k+1} t_{k+2} \dots t_{n-1} x\, dt_k, \quad dv_{n-1} = x\, dt_{n-1},$$

ergeben, so transformirt sich das Integral (79.) in den Ausdruck

$$(-1)^{\varrho_2+\dots+\varrho_{n-1}-\alpha_1-\dots-\alpha_{n-1}-n} x^{1-\varrho_1} \int_0^1 dt_{n-1} \dots \int_0^1 e^{t_1 t_2 \dots t_{n-1} x} \Phi_1\, dt_1,$$

wo zur Abkürzung

$$\Phi_1 = t_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\varrho_1} (1-t_{n-1})^{-\alpha_{n-1}} \prod_{k=1}^{k=n-2} t_k^{\alpha_k-\varrho_1} (1-t_k)^{\varrho_{k+1}-\alpha_k-1}$$

gesetzt ist. Die Exponentialgrösse wird in die Reihe

$$e^{t_1 t_2 \dots t_{n-1} x} = 1 + \frac{t_1 t_2 \dots t_{n-1} x}{1} + \dots + \frac{t_1^\nu t_2^\nu \dots t_{n-1}^\nu x^\nu}{1.2\dots\nu} + \dots$$

entwickelt. Dann ist, abgesehen von der Potenz von -1, der Factor von $\frac{x^{1-\varrho_1+\nu}}{1.2\dots\nu}$ in der betrachteten Function gleich dem Producte

$$\int_0^1 t_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\varrho_1+\nu} (1-t_{n-1})^{-\alpha_{n-1}} dt_{n-1} \prod_{k=1}^{k=n-2} \int_0^1 t_k^{\alpha_k-\varrho_1+\nu} (1-t_k)^{\varrho_{k+1}-\alpha_k-1} dt_k$$

$$= E(\alpha_{n-1}-\varrho_1+\nu+1,\, 1-\alpha_{n-1}) \prod_{k=1}^{k=n-2} E(\alpha_k-\varrho_1+\nu+1,\, \varrho_{k+1}-\alpha_k).$$

Indem man auf die *Euler*schen Integrale die Reductionsformel

$$E(a+\nu,\, b) = \frac{a(a+1)\dots(a+\nu-1)}{(a+b)(a+b+1)\dots(a+b+\nu-1)} E(a,\, b)$$

anwendet und eine Constante L_1 durch die Gleichung:

$$L_1 = (-1)^{\varrho_2+\varrho_3+\dots+\varrho_{n-1}-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_{n-1}-n} E(\alpha_1-\varrho_1+1,\, \varrho_2-\alpha_1) E(\alpha_2-\varrho_1+1,\, \varrho_3-\alpha_2) \dots$$
$$\dots E(\alpha_{n-2}-\varrho_1+1,\, \varrho_{n-1}-\alpha_{n-2}) E(\alpha_{n-1}-\varrho_1+1,\, 1-\alpha_{n-1})$$

definirt, erhält man für das Integral (79.) den Ausdruck:

$$L_1 x^{1-\varrho_1} F(\alpha_1-\varrho_1+1,\, \dots\, \alpha_{n-1}-\varrho_1+1;\; 2-\varrho_1,\, \varrho_2-\varrho_1+1,\, \dots\, \varrho_{n-1}-\varrho_1+1;\; x).$$

Derselbe stimmt, wenn man von dem constanten Factor absieht, mit dem zweiten particulären Integrale (73.) überein.

Die übrigen in (73.) angegebenen Hauptlösungen der Differentialgleichung (60.) lassen sich ebenfalls auf die Form $(n-1)$-facher bestimmter Integrale bringen, in denen die zu integrirende Function gleich der in (78.) genannten Grösse Φ ist. Nach § 3 wird die Gleichung (60.) auf eine Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung, diese auf eine Differentialgleichung $(n-2)$ter Ordnung reducirt, und so fort, bis man zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Gestalt (12.) gelangt. Bei dem Integral (79.) ist das particuläre Integral der Gleichung zweiter Ordnung, das dem Ausdruck (23.) entspricht, gewählt worden. Nimmt man statt dessen diejenige Lösung, die in (25.) angeführt ist, so ergiebt sich das $(n-1)$-fache Integral

$$(80.)\qquad \int_0^x dv_{n-1}\int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2}\int_0^{v_{n-2}} dv_{n-3}\ldots\int_0^{v_3} dv_2 \overline{\int_{-\infty}^{(0,v_2)}} \Phi\, dv_1,$$

das nach § 3 wiederum der Differentialgleichung (60.) genügt, und das für $n=3$ in das Integral (29.) übergeht. Setzt man das Reductionsverfahren nur bis zur Differentialgleichung dritter Ordnung fort und benutzt für letztere, welche die Gestalt (15.) hat, das zu (34.) analoge particuläre Integral, so findet man, dass der Ausdruck

$$\int_0^x dv_{n-1}\int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2}\ldots\int_0^{v_4} dv_3 \overline{\int_{-\infty}^{(0,v_3)}} dv_2\int_0^{v_2}\Phi\, dv_1$$

eine Lösung von (60.) ist. Es soll hier der allgemeinere Ausdruck

$$(81.)\qquad \int_0^x dv_{n-1}\int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2}\ldots\int_0^{v_{p+1}} dv_p \overline{\int_{-\infty}^{(0,v_p)}} dv_{p-1}\int_0^{v_{p-1}} dv_{p-2}\ldots\int_0^{v_2}\Phi\, dv_1,$$

in welchem die letztgenannten Integrale enthalten sind, betrachtet werden. Die Zahl p nehme die Werthe $2, 3, \ldots n-1$ nach einander an; für $p=2$ wird unter (81.) das Integral (80.), für $p=n-1$ das Integral

$$\int_0^x dv_{n-1} \overline{\int_{-\infty}^{(0,v_{n-1})}} dv_{n-2}\int_0^{v_{n-2}} dv_{n-3}\ldots\int_0^{v_2}\Phi\, dv_1$$

verstanden. Als Integrationsweg der Variable v_{p-1} möge in (81.) ein (doppelt durchlaufener) Abschnitt der negativen reellen Axe und ein um den Nullpunkt gelegter Kreis, dessen Radius grösser als mod. x ist, genommen werden. Man führt zunächst statt $v_1, v_2, \ldots v_{p-2}$ neue Variable $t_1, t_2, \ldots t_{p-2}$ mittelst der Gleichungen

$$v_1 = v_2 t_1,\quad v_2 = v_3 t_2,\quad \ldots\quad v_{p-2} = v_{p-1}t_{p-2}$$

in (81.) ein. Es ist dann (für $k=1, 2, \ldots p-2$)

$$v_k = t_k t_{k+1}\ldots t_{p-2} v_{p-1},\qquad dv_k = t_{k+1}t_{k+2}\ldots t_{p-2}v_{p-1}dt_k.$$

Die von $v_1, v_2, \ldots v_{p-2}$ abhängigen Factoren der Function Φ werden nach

(78.) durch das Product

$$e^{v_1}\prod_{k=1}^{k=p-2}(v_k-v_{k+1})^{\varrho_{k+1}-a_k-1}v_k^{a_k-\varrho_k}$$

dargestellt. Durch eine Rechnung, welche der für das Integral (79.) angegebenen Transformation entspricht, zeigt man, dass das $(p-2)$-fache Integral

$$\int_0^{v_{p-1}}dv_{p-2}\int_0^{v_{p-2}}dv_{p-3}\dots\int_0^{v_2}e^{v_1}dv_1\prod_{k=1}^{k=p-2}(v_k-v_{k+1})^{\varrho_{k+1}-a_k-1}v_k^{a_k-\varrho_k}$$

durch die obige Substitution in das Product aus dem Werthe

$$(-1)^{\varrho_2+\varrho_3+\dots+\varrho_{p-1}-a_1-a_2-\dots-a_{p-2}-p}\,v_{p-1}^{\varrho_{p-1}-\varrho_1}$$

und dem Integral

$$\int_0^1 dt_{p-2}\int_0^1 dt_{p-3}\dots\int_0^1 dt_1\,e^{t_1t_2\dots t_{p-2}v_{p-1}}\prod_{k=1}^{k=p-2}t_k^{a_k-\varrho_1}(1-t_k)^{\varrho_{k+1}-a_k-1}$$

übergeht. Es werde ferner der in der Function Φ vorkommende Factor $(v_{p-1}-v_p)^{\varrho_p-a_{p-1}-1}$ nach dem binomischen Satze in die Reihe

$$v_{p-1}^{\varrho_p-a_{p-1}-1}\left(1-\frac{v_p}{v_{p-1}}\right)^{\varrho_p-a_{p-1}-1} = v_{p-1}^{\varrho_p-a_{p-1}-1}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l(\varrho_p-\alpha_{p-1}-1)_l\frac{v_p^l}{v_{p-1}^l}$$

entwickelt. Die Reihe convergirt, da wegen des für v_{p-1} vorausgesetzten Integrationsweges mod. v_{p-1} stets grösser als mod. x ist, während die Moduln von $v_p,\ v_{p+1},\ \dots\ v_{n-1}$, wie man bestimmen darf, in (81.) den Werth mod. x nur als Maximum erreichen. Indem man der Symmetrie halber noch $v_{p-1}=t_{p-1}$ setzt, findet man für das in (81.) enthaltene $(p-1)$-fache Integral

$$\overline{\int}_{-\infty}^{(0,v_p)}dv_{p-1}\int_0^{v_{p-1}}dv_{p-2}\dots\int_0^{v_2}dv_1e^{v_1}\prod_{k=1}^{k=p-1}(v_k-v_{k+1})^{\varrho_{k+1}-a_k-1}v_k^{a_k-\varrho_k}$$

den Ausdruck

$$(-1)^{\varrho_2+\dots+\varrho_{p-1}-a_1-\dots-a_{p-2}-p}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l(\varrho_p-\alpha_{p-1}-1)_l v_p^l G_l,$$

wo G_l das $(p-1)$-fache constante Integral

$$G_l=\overline{\int}_{-\infty}^{(0)}t_{p-1}^{\varrho_p-\varrho_1-l-1}dt_{p-1}\int_0^1 dt_{p-2}\dots\int_0^1 dt_1e^{t_1t_2\dots t_{p-1}}\prod_{k=1}^{k=p-2}t_k^{a_k-\varrho_1}(1-t_k)^{\varrho_{k+1}-a_k-1}$$

bedeutet. Der Binomialcoefficient $(\varrho_p-\alpha_{p-1}-1)_l$ hat für $l=0$ den Werth 1. Es möge ferner durch H_l das $(n-p)$-fache Integral

$$H_l=\int_0^x dv_{n-1}\int_0^{v_{n-1}}dv_{n-2}\dots$$

$$\dots\int_0^{v_{p+1}}dv_p(v_{n-1}-x)^{-a_{n-1}}v_{n-1}^{a_{n-1}-\varrho_{n-1}}v_p^l\prod_{k=p}^{k=n-2}(v_k-v_{k+1})^{\varrho_{k+1}-a_k-1}v_k^{a_k-\varrho_k}$$

bezeichnet werden. Dann ist das Integral (81.) gleich der Summe

$$(-1)^{\varrho_2+\cdots+\varrho_{p-1}-a_1-\cdots-a_{p-2}-p}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l(\varrho_p-\alpha_{p-1}-1)_l G_l H_l$$

$$=(-1)^{\varrho_2+\cdots+\varrho_{p-1}-a_1-\cdots-a_{p-2}-p}\sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{(\alpha_{p-1}-\varrho_p+1)(\alpha_{p-1}-\varrho_p+2)\ldots(\alpha_{p-1}-\varrho_p+l)}{1.2\ldots l}G_l H_l.$$

Um H_l umzuformen, substituirt man

$$v_p = v_{p+1}t_p,\quad v_{p+1} = v_{p+2}t_{p+1},\quad \ldots\quad v_{n-2} = v_{n-1}t_{n-2},\quad v_{n-1} = xt_{n-1},$$

woraus

$$v_p = t_p t_{p+1}\ldots t_{n-1}x,\quad v_{p+1} = t_{p+1}t_{p+2}\ldots t_{n-1}x,\quad \text{etc.}$$

folgt. Hierdurch ergiebt sich

$$(-1)^{a_p+\cdots+a_{n-1}-\varrho_{p+1}-\cdots-\varrho_{n-1}+n-p-1}H_l$$

$$= x^{1-\varrho_p+l}\int_0^1 t_{n-1}^{a_{n-1}-\varrho_p+l}(1-t_{n-1})^{-a_{n-1}}dt_{n-1}\prod_{k=p}^{k=n-2}\int_0^1 t_k^{a_k-\varrho_p+l}(1-t_k)^{\varrho_{k+1}-a_k-1}dt_k$$

$$= x^{1-\varrho_p+l}E(\alpha_{n-1}-\varrho_p+l+1,\, 1-\alpha_{n-1})\prod_{k=p}^{k=n-2}E(\alpha_k-\varrho_p+l+1,\, \varrho_{k+1}-\alpha_k),$$

so dass, wenn die zuvor erwähnte Reductionsformel für die *Euler*schen Integrale berücksichtigt und die Bezeichnung (48.) angewendet wird, die Gleichung

$$(-1)^{a_p+\cdots+a_{n-1}-\varrho_{p+1}-\cdots-\varrho_{n-1}+n-p-1}H_l$$

$$= x^{1-\varrho_p+l}\frac{[\alpha_{n-1}-\varrho_p+1]_l^+}{[2-\varrho_p]_l^+}E(\alpha_{n-1}-\varrho_p+1,\, 1-\alpha_{n-1})$$

$$\times\prod_{k=p}^{k=n-2}\frac{[\alpha_k-\varrho_p+1]_l^+}{[\varrho_{k+1}-\varrho_p+1]_l^+}E(\alpha_k-\varrho_p+1,\, \varrho_{k+1}-\alpha_k)$$

entsteht. Der Werth des Integrals G_l ist durch die Formel (22.) der Abhandlung „Ueber ein vielfaches, auf *Euler*sche Integrale reducirbares Integral" (dieses Journal, Bd. 107, S. 253) bekannt. Denn diese Formel geht, wenn daselbst

$$m = p-2,\quad a = \varrho_1-\varrho_p+l+1,\quad b_k = \alpha_k-\varrho_1,\quad c_k = \varrho_{k+1}-\alpha_k$$

gesetzt wird, in die Gleichung

$$G_l = \Gamma(\varrho_p-\varrho_1-l)\prod_{k=1}^{k=p-2}E(\alpha_k-\varrho_p+l+1,\, \varrho_{k+1}-\alpha_k)$$

über, der man (cfr. (32.)) die Gestalt

$$G_l = \frac{\Gamma(\varrho_p-\varrho_1)}{[\varrho_1-\varrho_p+1]_l^+}\prod_{k=1}^{k=p-2}\frac{[\alpha_k-\varrho_p+1]_l^+}{[\varrho_{k+1}-\varrho_p+1]_l^+}E(\alpha_k-\varrho_p+1,\, \varrho_{k+1}-\alpha_k)$$

geben kann. Durch Einführung dieser Werthe von G_l und H_l verwandelt sich der Ausdruck, der für das Integral (81.) erhalten wurde, in das Product aus einer Constante, der Potenz $x^{1-\varrho_p}$ und einer Reihe von der Form (72.). Man bezeichne, indem man zur Abkürzung

$$\varrho_2+\varrho_3+\cdots+\varrho_{p-1}+\varrho_{p+1}+\cdots+\varrho_{n-1}-\alpha_1-\cdots-\alpha_{p-2}-\alpha_p-\cdots-\alpha_{n-1}-n+1 = \sigma$$

setzt, durch L_p die Constante

$$(-1)^\sigma \Gamma(\varrho_p-\varrho_1)E(\alpha_1-\varrho_p+1,\, \varrho_2-\alpha_1)E(\alpha_2-\varrho_p+1,\, \varrho_3-\alpha_2)\ldots$$
$$\ldots E(\alpha_{p-2}-\varrho_p+1,\, \varrho_{p-1}-\alpha_{p-2})$$
$$.E(\alpha_p-\varrho_p+1,\, \varrho_{p+1}-\alpha_p)\ldots E(\alpha_{n-2}-\varrho_p+1,\, \varrho_{n-1}-\alpha_{n-2})E(\alpha_{n-1}-\varrho_p+1,\, 1-\alpha_{n-1}).$$

Dann ergiebt sich (für $p = 2, 3, \ldots n-1$) die Gleichung

$$(82.)\quad \begin{cases} \int_0^x dv_{n-1}\int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2}\ldots\int_0^{v_{p+1}} dv_p \overline{\int_{-\infty}^{(0,v_p)}} dv_{p-1}\int_0^{v_{p-1}} dv_{p-2}\ldots\int_0^{v_2}\Phi\, dv_1 \\ = L_p x^{1-\varrho_p} F(\alpha_1-\varrho_p+1, \ldots \alpha_{n-1}-\varrho_p+1; \\ \qquad 2-\varrho_p, \varrho_1-\varrho_p+1, \ldots \varrho_{p-1}-\varrho_p+1, \varrho_{p+1}-\varrho_p+1, \ldots \varrho_{n-1}-\varrho_p+1; x). \end{cases}$$

Von den n in (73.) genannten Hauptlösungen der Differentialgleichung (60.) sind hiermit die $n-1$ mehrdeutigen auf bestimmte Integrale der Function Φ zurückgeführt worden. Es bleibt übrig, ein analoges Resultat für die eindeutige Hauptlösung

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}; \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1}; x)$$

abzuleiten. Man bilde das $(n-1)$-fache Integral

$$(83.)\qquad \overline{\int_{-\infty}^{(0,x)}} dv_{n-1}\int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2}\int_0^{v_{n-2}} dv_{n-3}\ldots\int_0^{v_2}\Phi\, dv_1,$$

in welchem die Variable v_{n-1} (wie in (81.) die Variable v_{p-1}) einerseits einen Abschnitt der negativen reellen Axe (in beiden Richtungen), andererseits eine Kreislinie um den Nullpunkt, deren Radius grösser als mod. x ist, durchlaufen möge. Durch Entwickelung der in Φ vorkommenden Potenz $(v_{n-1}-x)^{-\alpha_{n-1}}$ in die Reihe

$$v_{n-1}^{-\alpha_{n-1}}\left(1-\frac{x}{v_{n-1}}\right)^{-\alpha_{n-1}} = v_{n-1}^{-\alpha_{n-1}}\left\{1+\frac{\alpha_{n-1}}{1}\frac{x}{v_{n-1}}+\frac{\alpha_{n-1}(\alpha_{n-1}+1)}{1.2}\frac{x^2}{v_{n-1}^2}+\cdots\right\}$$

entsteht aus dem Integral (83.) die Summe

$$\mathfrak{G}_0+\frac{\alpha_{n-1}}{1}\mathfrak{G}_1 x+\frac{\alpha_{n-1}(\alpha_{n-1}+1)}{1.2}\mathfrak{G}_2 x^2+\cdots+\frac{[\alpha_{n-1}]_l^+}{[1]_l^+}\mathfrak{G}_l x^l+\cdots,$$

in der $\mathfrak{G}_l$ das $(n-1)$-fache constante Integral

$$\mathfrak{G}_l = \overline{\int_{-\infty}^{(0)}} v_{n-1}^{-\varrho_{n-1}-l} dv_{n-1}\int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2}\ldots\int_0^{v_2} dv_1 e^{v_1}\prod_{k=1}^{k=n-2}(v_k-v_{k+1})^{\varrho_{k+1}-\alpha_k-1} v_k^{\alpha_k-\varrho_k}$$

bedeutet. Verbindet man $v_1, \ldots v_{n-1}$ mit neuen Variablen $t_1, \ldots t_{n-1}$ durch die Gleichungen

$$v_1 = v_2 t_1,\quad v_2 = v_3 t_2,\quad \ldots\quad v_{n-2} = v_{n-1} t_{n-2},\quad v_{n-1} = t_{n-1},$$

so dass, für $k = 1, 2, \dots n-2,$

$$v_k = t_k t_{k+1} \dots t_{n-1}, \quad dv_k = t_{k+1} t_{k+2} \dots t_{n-1} dt_k$$

ist, und nennt man σ' die Zahl

$$\sigma' = \varrho_2 + \varrho_3 + \dots + \varrho_{n-1} - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{n-2} - n,$$

so ergiebt sich

$$(-1)^{-\sigma'} \mathfrak{G}_l = \overline{\int_{-\infty}^{(0)}} t_{n-1}^{-\varrho_1 - l} dt_{n-1} \int_0^1 dt_{n-2} \dots \int_0^1 dt_1 \, e^{t_1 t_2 \dots t_{n-1}} \prod_{k=1}^{k=n-2} t_k^{\alpha_k - \varrho_1} (1-t_k)^{\varrho_{k+1} - \alpha_k - 1}.$$

Das rechts stehende $(n-1)$-fache Integral hat aber zufolge der Formel (22.) des zuvor genannten Aufsatzes*) (woselbst $m = n-2$, $a = \varrho_1 + l$, $b_k = \alpha_k - \varrho_1$, $c_k = \varrho_{k+1} - \alpha_k$ gesetzt wird) den Werth

$$\overline{\Gamma}(1-\varrho_1-l) \prod_{k=1}^{k=n-2} E(\alpha_k + l, \; \varrho_{k+1} - \alpha_k)$$

$$= \frac{\overline{\Gamma}(1-\varrho)}{\varrho_1(\varrho_1+1)\dots(\varrho_1+l-1)} \prod_{k=1}^{k=n-2} \frac{\alpha_k(\alpha_k+1)\dots(\alpha_k+l-1)}{\varrho_{k+1}(\varrho_{k+1}+1)\dots(\varrho_{k+1}+l-1)} E(\alpha_k, \; \varrho_{k+1} - \alpha_k).$$

Bezeichnet man also durch L die Constante

$$(-1)^{\sigma'} \overline{\Gamma}(1-\varrho_1) E(\alpha_1, \; \varrho_2 - \alpha_1) E(\alpha_2, \; \varrho_3 - \alpha_2) \dots E(\alpha_{n-2}, \; \varrho_{n-1} - \alpha_{n-2}),$$

so ist das Integral (83.) mit dem Ausdrucke

$$LF(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}; \; \varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{n-1}; \; x)$$

identisch.

Die Rechnungen dieses Paragraphen enthalten die Voraussetzung, dass die betrachteten bestimmten Integrale convergiren, was gewisse Beschränkungen für die Constanten $\alpha_1, \varrho_1, \dots \alpha_{n-1}, \varrho_{n-1}$ zur Folge hat. Jedoch lässt sich in den Fällen, wo bei (79.), (80.), (81.), (83.) Divergenz eintritt — sei es an einer unteren Grenze 0 oder an einer oberen Grenze v_k, x, — die vorstehende Entwickelung in derselben Weise ergänzen, wie dies für die Differentialgleichung dritter Ordnung in § 2 ausführlich angegeben worden ist. Man ist im Stande, die Differentialgleichung (60.) auch im allgemeinen Falle mittelst bestimmter Integrale, in welchen Φ die zu integrirende Function ist, zu lösen, indem man geschlossene Integrationswege, die aus einfachen oder doppelten Umläufen um die bisherigen Grenzen bestehen, anwendet.

*) Dieses Journal, Bd. 107, S. 253.



Sophie von Kowalevsky.

Ich erfülle die traurige Pflicht, den Lesern dieses Journals von dem Hinscheiden der Frau *Sophie von Kowalevsky*, geb. *Corvin-Krukowskoy*, Kunde zu geben.

Sie wurde am 15. Januar 1851 zu Moskau geboren, verheirathete sich im Jahre 1868, erhielt 1874 in Göttingen, nachdem sie ein Jahr (1869/70) in Heidelberg und dann vier Jahre mit kurzen Unterbrechungen hier in Berlin, vornehmlich unter Herrn *Weierstrass*' Leitung, mathematischen Studien obgelegen hatte, auf Grund einer im 80. Bande dieses Journals abgedruckten Dissertation die Doctorwürde und im Jahre 1884 an der Universität Stockholm eine Professur.

Die letzte Ferienzeit im December vorigen und Januar dieses Jahres brachte Frau *von Kowalevsky* bei Verwandten in der Nähe von Nizza zu, hielt sich dann auf der Rückkehr einige Tage in Paris und in Berlin auf und reiste am Montag den 2. Februar von hier nach Stockholm ab. Dort erkrankte sie bald nach ihrer Ankunft an einer Pleuropneumonitis und erlag derselben am Dienstag den 10. Februar Morgens 4 Uhr. So ward sie schon im Alter von 40 Jahren viel zu früh der von ihr mit ausgezeichnetem Erfolge gepflegten Wissenschaft und dem grossen, ihr in Liebe und Verehrung zugethanen Freundeskreise entrissen.

Sophie von Kowalevsky (nach ihren letzten Visitenkarten „*Sonja Kovalevsky*") verband mit einem ausserordentlichen Talent sowohl für allgemeine mathematische Speculation als auch für die bei der Ausführung specieller Untersuchungen nothwendige Technik gewissenhaften, unermüdlichen Fleiss, hielt bei intensivster Fachthätigkeit stets ihren Sinn für andere geistige Interessen offen, bewahrte dabei immer ihre Weiblichkeit und erwarb und erhielt sich darum im Verkehr auch die Sympathie derjenigen, die ausserhalb ihres fachwissenschaftlichen Kreises standen. Die Geschichte der Mathematik wird von ihr als einer der merkwürdigsten Erscheinungen unter den überhaupt äusserst seltenen Forscherinnen zu berichten haben. Ihr Gedächtniss wird durch die zwar nicht zahlreichen aber werthvollen Arbeiten, welche sie veröffentlicht hat, in der ganzen mathematischen Welt fortdauern, die Erinnerung an ihre bedeutende und dabei anmuthvolle Persönlichkeit wird in den Herzen aller derer fortleben, welche das Glück hatten, sie zu kennen.

Die Titel der sechs von Frau *von Kowalevsky* publicirten Abhandlungen lauten buchstäblich:

1. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde bei der philosophischen Facultät zu Göttingen von *Sophie v. Kowalevsky*, geb. *v. Corvin-Krukowskoy*. Berlin 1874 bei Georg Reimer. Abgedruckt im 80. Bande dieses Journals, S. 1—32.
2. Ueber die Reduction einer bestimmten Klasse *Abel*scher Integrale 3ten Ranges auf elliptische Integrale, von *Sophie Kowalevski* in Stockholm. Acta Mathematica Bd. 4, S. 393—414. 1884.
3. Ueber die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln, von *Sophie Kowalevski* in Stockholm. Acta Mathematica Bd. 6, S. 249—304. 1885. Die Widmung eines Exemplars dieser Abhandlung, welches ich von der Verfasserin erhalten habe, trägt die Unterschrift „*Sophie v. Kowalevski*".
4. Zusätze und Bemerkungen zu *Laplace*'s Untersuchung über die Gestalt der Saturnsringe. Von Frau *Sophie Kowalevsky* in Stockholm. Astronomische Nachrichten Bd. 111, Nr. 2643, S. 37—48. 1885. Der Redaction überreicht von *Hugo Gyldén*.
5. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, par *Sophie Kowalevski* à Stockholm. Acta Mathematica Bd. 12, S. 177—232. 1889. (Auf S. 177 findet sich die Anmerkung: „Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance soleunelle du 24. décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs".)
6. Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, par *Sophie Kowalevski* à Stockholm. Acta Mathematica Bd. 14, S. 81—93. 1889.

Berlin, den 20. Februar 1891. *L. Kronecker.*

Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel oder Räume. V, VI *).

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i. E.)

V.

Einen besonderen Reiz bieten unsere linearen Mannigfaltigkeiten durch die Verschiedenheit ihrer Erzeugnisse und der sonstigen von ihnen abhängigen oder sie bestimmenden Gebilde. Sie führten uns schon in den früheren Theilen dieser Arbeit zu mancherlei Gruppen sowohl von Punkten als auch von Strahlen und Ebenen, zu Raumcurven und räumlichen Ebenenbüscheln, zu Flächen als den Orten theils von Punkten theils von Ebenen, ferner zu Schaaren, Congruenzen und Complexen gerader Linien, zu Büscheln, Bündeln, Schaaren, Netzen, und höheren Systemen von Raumcurven und Flächen. Bei einer und derselben linearen Mannigfaltigkeit pflegen verschiedenartige solche Raumgebilde zugleich aufzutreten, die zu einander in vielfachen und innigen Beziehungen stehen. Wir erinnern beispielsweise an das Haupttetraeder, den tetraedralen Strahlencomplex, die ∞^3 Ordnungscurven und die ∞^4 Ordnungsflächen eines Raumbüschels; an die Kerncurve c^6, deren Doppelsehnen-Schaar, die ∞^3 kubischen Ordnungsflächen und die ∞^2 Haupttetraeder eines Raumbündels, und an die Kernfläche K^4, die ∞^3 Kerncurven, die ∞^4 Haupttetraeder und die ∞^6 kubischen Ordnungsflächen eines Raumgebüsches.

Auch bei der linearen Mannigfaltigkeit $|\Sigma_4|$ von ∞^4 collinearen Räumen, von welcher dieser fünfte Theil meiner Arbeit handelt, treten zahlreiche und verschiedenartige Gebilde auf. Als wichtigstes derselben werden wir eine „Hauptcurve“ zehnter Ordnung kennen lernen, durch welche i. A. alle übrigen und $|\Sigma_4|$ selbst bestimmt sind, und in welcher die ∞^4 Kernflächen vierter Ordnung von $|\Sigma_4|$ sich schneiden.

*) Fortsetzung und Schluss von Bd. 107 S. 162 dieses Journals.

§ 16.

Die lineare Mannigfaltigkeit $|\Sigma_4|$ von ∞^4 collinearen Räumen und das $|\varepsilon_4|$-Gebüsch $|\varepsilon_{4,3}|$.

88. Eine lineare Mannigfaltigkeit $|\Sigma_4|$ besteht aus ∞^4 collinearen Räumen und ist durch beliebige fünf derselben bestimmt. Sie enthält (36.) ∞^6 Raumbüschel $|\Sigma_1|$, ∞^6 Bündel $|\Sigma_2|$ und ∞^4 Gebüsche $|\Sigma_3|$, deren ∞^6 Haupttetraeder, ∞^6 Kerncurven c^6 und ∞^4 Kernflächen K^4 wir auch zu $|\Sigma_4|$ rechnen. Beliebige zwei, drei oder vier Raumgebüsche von $|\Sigma_4|$ haben einen Raumbündel, einen Raumbüschel resp. einen Raum gemein (35.).

Auf $|\Sigma_4|$ ruht ein „Gebüsch" $|\varepsilon_{4,3}|$ von ∞^3 collinearen Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_4|$, die aus je ∞^4 homologen Ebenen der Räume von $|\Sigma_4|$ bestehen. Dieses Gebüsch $|\varepsilon_{4,3}|$ ist durch beliebige vier seiner collinearen $|\varepsilon_4|$ bestimmt und enthält alle durch je zwei bezw. drei derselben bestimmten Büschel $|\varepsilon_{4,1}|$ oder Bündel $|\varepsilon_{4,2}|$. Die collinearen Räume von $|\Sigma_4|$ bestehen aus je ∞^3 homologen Ebenen der Mannigfaltigkeiten von $|\varepsilon_{4,3}|$.

Die sich stützenden Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_4|$ und $|\varepsilon_{4,3}|$ hängen i. A. von 40 Parametern ab (vgl. 30.).

89. Jedes Raumgebüsch $|\Sigma_3|$ von $|\Sigma_4|$ ruht (30.) auf einem Gebüsche $|T_3|$ homologer Räume der ∞^3 collinearen $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,3}|$. Seine Kernfläche vierter Ordnung K^4 enthält die Doppelpunkte der ∞^2 singulären Räume und die Schnittpunkte homologer Ebenen aller Räume von $|\Sigma_3|$ sowohl als auch von $|T_3|$; sie ist der Ort dieser Punkte (32.). Da zwei Gebüsche von $|\Sigma_4|$ allemal einen Raumbündel gemein haben, so gehen ihre Kernflächen K^4 beide durch dessen Kerncurve c^6 sechster Ordnung (32.), schneiden sich aber noch in einer Raumcurve c^{10} zehnter Ordnung. In den Punkten dieser *„Hauptcurve"* c^{10} von $|\Sigma_4|$ und $|\varepsilon_{4,3}|$ treffen sich je ∞^4 homologe Ebenen der Räume von $|\Sigma_4|$, durch sie gehen folglich alle ∞^4 Kernflächen K^4. Jeder Punkt von c^{10} ist Mittelpunkt eines Bündels, auf welchen eine Mannigfaltigkeit von $|\varepsilon_{4,3}|$ sich reducirt, und Doppelpunkt der ∞^1 singulären Räume eines speciellen Büschels $|\Sigma_1|$ von $|\Sigma_4|$; in ihm schneiden sich die Axen von ∞^3 homologen Ebenenbüscheln der ∞^3 collinearen $|\varepsilon_4|$. Der Ort eines Punktes, in welchem homologe Ebenen von fünf beliebigen collinearen Räumen sich schneiden, ist also i. A. eine Raumcurve c^{10} zehnter Ordnung.

90. Die lineare Mannigfaltigkeit $|\Sigma_4|$ enthält ∞^3 singuläre, in Ebenenbündel ausgeartete Räume (89.); jeder Punkt der Hauptcurve c^{10} ist von ∞^1, jeder andere Punkt ist von einem dieser Räume der Doppelpunkt. Die Kernfläche eines Gebüsches von $|\Sigma_4|$, welches vier dieser singulären Räume

oder zwei dieselben enthaltende Raumbüschel verbindet, geht durch deren vier Doppelpunkte. Vier beliebige Punkte können demnach mit c^{10} durch eine Kernfläche K^4 verbunden werden. Durch drei Punkte geht allemal eine und i. A. nur eine der ∞^6 Kerncurven c^6 von $|\Sigma_4|$; der zugehörige Raumbündel (23.) verbindet die drei singulären Räume von $|\Sigma_4|$, welche jene Punkte zu Doppelpunkten haben. Durch einen beliebigen Punkt gehen ∞^3 Kernflächen und ∞^4 Kerncurven von $|\Sigma_4|$, durch jeden Punkt von c^{10} aber gehen ∞^5 Kerncurven. Drei Punkte von c^{10} können durch ∞^3 Kerncurven c^6 verbunden werden.

Die Hauptcurve c^{10} bildet mit jeder Kerncurve c^6 die Grundcurve eines Kernflächenbüschels von $|\Sigma_4|$; denn alle durch drei beliebige Punkte von c^6 gehenden Kernflächen K^4 schneiden sich in c^{10} und c^6, und durch jeden Punkt des Raumes geht eine von ihnen.

91. Ein Raumbüschel, welcher zwei singuläre Räume von $|\Sigma_4|$ verbindet, hat deren Doppelpunkte zu Hauptpunkten. Zwei Punkte bestimmen demnach i. A. ein Haupttetraeder von $|\Sigma_4|$, zu dessen Eckpunkten sie gehören. Jedem Haupttetraeder können ∞^2 Kernflächen K^4 und Kerncurven c^6 umschrieben werden, weil jeder Raumbüschel von $|\Sigma_4|$ in ∞^2 Gebüschen und Bündeln von $|\Sigma_4|$ enthalten ist (36.). Ein Haupttetraeder ist i. A. jeder Kernfläche oder Kerncurve eingeschrieben, die durch zwei seiner Eckpunkte geht. Die acht Eckpunkte von je zwei der ∞^6 Haupttetraeder liegen mit c^{10} auf einer Kernfläche K^4 (90.). Wenn zwei Haupttetraeder einen Eckpunkt gemein haben, der nicht auf c^{10} liegt, so sind sie einer Kerncurve c^6 eingeschrieben.

Weil ein Raumbündel und ein Gebüsch von $|\Sigma_4|$ einen Raumbüschel gemein haben (88.), so schneiden sich eine beliebige Kerncurve c^6 und eine Kernfläche K^4 von $|\Sigma_4|$ in den vier Eckpunkten eines Haupttetraeders. Die übrigen 20 Schnittpunkte von c^6 und K^4 liegen auf der Hauptcurve c^{10}. Die ∞^6 Kerncurven c^6 haben demnach mit c^{10} je 20 Punkte gemein und werden von einer beliebigen Kernfläche K^4 ausserdem in den Eckpunkten je eines Haupttetraeders von $|\Sigma_4|$ geschnitten. Drei beliebige Kernflächen schneiden sich in c^{10} und in den Eckpunkten eines Haupttetraeders; zwei auf einer Kernfläche liegende Kerncurven sind einem Haupttetraeder umschrieben (vgl. 32.).

92. Durch drei beliebige Punkte einer Sehne s von c^{10} geht eine Kerncurve c^6, welche in s und eine Raumcurve c^5 fünfter Ordnung zerfällt;

denn die ∞^1 Kernflächen K^4, welche die drei Punkte verbinden, gehen alle durch s. Der zu c^6 gehörige Raumbündel $|\Sigma_2|$ enthält ∞^1 singuläre Räume von $|\Sigma_4|$, deren Doppelpunkte auf s liegen, und ist durch drei derselben bestimmt. Da diese Räume nach jedem der beiden Schnittpunkte von s und c^{10} homologe Ebenen schicken, so haben sie und die übrigen Räume von $|\Sigma_2|$ die Gerade s entsprechend gemein. Die beiden Theile s und c^5 der Kerncurve c^6 schneiden sich in vier Punkten (28*b*.). Die singulären Räume von $|\Sigma_2|$, deren Doppelpunkte auf s liegen, bilden eine quadratische Mannigfaltigkeit, denn ein Gebüsch $|\Sigma_3|$ von $|\Sigma_4|$ enthält i. A. zwei von ihnen (vgl. 28*b*.).

93. Die singulären Räume von $|\Sigma_4|$, deren Doppelpunkte mit drei Punkten von c^{10} in einer Geraden und somit auf einer „Doppelsehne" *) v von c^{10} liegen, bilden einen Raumbüschel $|\Sigma_1|$. Denn sie liegen in jedem durch zwei von ihnen gehenden Gebüsche von $|\Sigma_4|$, weil die Kernfläche eines solchen Gebüsches fünf und somit alle Punkte von v enthält. Die ∞^3 Büschel des auf $|\Sigma_1|$ ruhenden Complexes $|u_3|$ schicken durch jeden Punkt von v homologe Ebenen, und ∞^2 von ihnen haben v zur Axe (13*a*.). Auf jedem durch $|\Sigma_1|$ gehenden Raumbündel $|\Sigma_2|$ von $|\Sigma_4|$ ruht demzufolge ein Bündelcomplex $|S_3|$, von welchem ∞^2 Bündel den Strahl v entsprechend gemein haben; diese ∞^2 Bündel aber bilden ein specielles Netz, und ihre Ordnungsfläche F_0^3 ist geradlinig und hat v zur Doppelpunktsgeraden (19*a*.). Die übrigen kubischen Ordnungsflächen von $|\Sigma_2|$ gehen durch v, weil das specielle Netz mit den übrigen Netzen von $|S_3|$ je eine Bündelreihe gemein hat, deren Ordnungscurve in v und je zwei andere Gerade zerfällt. Die Kerncurve c^6 von $|\Sigma_2|$ und $|S_3|$, in welcher F_0^3 und die übrigen Ordnungsflächen sich schneiden (23.), zerfällt deshalb in v und eine Raumcurve c^5 fünfter Ordnung. Letztere hat mit v drei Punkte gemein; denn eine durch v gelegte Ebene schneidet F_0^3 in v und einer Geraden g und hat mit c^5 fünf Punkte gemein, von denen nur zwei auf g, die drei übrigen also auf v liegen.

Eine Doppelsehne v der Hauptcurve c^{10} bildet sonach mit ∞^2 Raumcurven c^5 fünfter Ordnung je eine Kerncurve c^6 von $|\Sigma_4|$. Durch jeden Punkt des Raumes geht (90.) eine dieser c^5; dieselbe hat drei Punkte mit

*) Analytisch finde ich, dass 17 Doppelsehnen oder Trisecanten von c^{10} durch einen beliebigen Punkt dieser Curve gehen.

v und (91.) 17 Punkte mit c^{10} gemein und liegt mit ∞^1 ihrer Sehnen g auf einer kubischen Fläche, welche v zur Doppelpunktsgeraden hat.

94. Die kubischen Flächen, welche irgend drei Räume von $|\Sigma_4|$ mittelst ihrer homologen Bündel erzeugen, nennen wir „Ordnungsflächen" von $|\Sigma_4|$ und $|\varepsilon_{4,3}|$. Zu ihnen gehören die ∞^3 Ordnungsflächen jedes Raumbündels von $|\Sigma_4|$, welche in dessen Kerncurve c^6 sich schneiden (23.), sowie die ∞^6 Ordnungsflächen jedes Gebüsches von $|\Sigma_4|$ (32.). Ueberhaupt giebt es ∞^9 kubische Ordnungsflächen F^3 in $|\Sigma_4|$; jede von ihnen geht durch eine der ∞^6 Kerncurven c^6 und schneidet ∞^3 andere Ordnungsflächen in dieser c^6. Jede Doppelsehne der Hauptcurve c^{10} ist Doppelpunktsgerade einer geradlinigen Ordnungsfläche (93.).

Jede $|\varepsilon_{4,2}|$ von $|\varepsilon_{4,3}|$ ruht (52.) auf einer linearen Mannigfaltigkeit $|S_4|$, die aus homologen Bündeln der ∞^4 Räume von $|\Sigma_4|$ besteht. Die kubischen Ordnungsflächen der ∞^6 Netze von $|S_4|$ sind zugleich solche von $|\Sigma_4|$; sie gehen (54.) alle durch die 10 Kernpunkte K von $|S_4|$ und $|\varepsilon_{4,2}|$. Diese 10 K liegen auf der Hauptcurve c^{10}, weil in ihnen homologe Ebenen der Bündel von $|S_4|$ und somit der Räume von $|\Sigma_4|$ sich schneiden. Jede Ordnungsfläche F^3 von $|\Sigma_4|$ hat mit c^{10} eine Gruppe 10 K, ausserdem aber (91.) zwanzig auf ihrer Kerncurve c^6 liegende Punkte gemein. Es giebt ∞^3 Kernpunktgruppen 10 K; in jeder von ihnen wird die Hauptcurve c^{10} von einer der ∞^3 Ordnungsflächen F^3 geschnitten, welche durch eine beliebige Kerncurve gehen. Jede Gruppe 10 K kann mit jeder Kerncurve c^6 durch eine kubische Ordnungsfläche verbunden werden. Drei beliebige Punkte von c^{10} sind allemal in einer und i. A. nur in einer Gruppe 10 K enthalten; die zugehörige $|\varepsilon_{4,2}|$ verbindet die drei singulären $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,3}|$, welche (89.) aus den Ebenen der drei Punkte bestehen.

Durch die ∞^1 singulären Räume von $|\Sigma_4|$, welche einen Punkt P der Hauptcurve c^{10} zum Doppelpunkte haben, gehen ∞^2 Raumbündel und ∞^2 Gebüsche von $|\Sigma_4|$. Die ∞^2 Kerncurven dieser Bündel haben P zum dreifachen Punkte und werden aus P durch kubische Ordnungskegel projicirt (28*a*.); die ∞^2 Kernflächen der Gebüsche haben P zum Doppelpunkte (34*a*.), gehen durch c^{10} und schneiden sich büschelweise in je einer der ∞^2 Kerncurven.

95. In der Mannigfaltigkeit $|\Sigma_4|$ giebt es i. A. 20 zweifach singuläre Räume, deren Ebenen nämlich durch je eine Axe gehen *). Die 20

*) Den Beweis kann ich nur analytisch führen. Seien α_i, β_i, γ_i, δ_i lineare Functionen der Punktcoordinaten x, y, z, etwa (vgl. 80.):

Axen a dieser Räume mögen „Axen von $|\Sigma_4|$" heissen; sie haben mit der Hauptcurve c^{10} je vier Punkte gemein. Denn $|\Sigma_4|$ ist durch fünf collineare Räume bestimmt, und wenn einer von diesen zweifach singulär ist, so schneidet seine Axe die Kernfläche der übrigen in vier Punkten, durch welche homologe Ebenen jener fünf und folglich aller Räume von $|\Sigma_4|$ gehen; die vier Punkte aber liegen (89.) auf c^{10}. Die 20 Axen a sind i. A. windschief; wenn zwei von ihnen sich schneiden, so liegt der Schnittpunkt auf der Hauptcurve c^{10}, weil er von mehr als einem singulären Raume von $|\Sigma_4|$ ein Doppelpunkt ist.

Jeder der 20 zweifach singulären Räume ist in ∞^3 Gebüschen und in ∞^4 Raumbündeln von $|\Sigma_4|$ enthalten; seine Axe a liegt deshalb mit c^{10} auf ∞^3 Kernflächen K^4 und ist von ∞^4 Kerncurven c^6 ein Bestandtheil (34., 28*d*.). Letztere zerfallen in a und je eine Raumcurve c^5 fünfter Ordnung, welche zwei Punkte mit a und 16 Punkte mit c^{10} gemein hat (91.). Jede durch a gehende Kernfläche K^4 enthält ∞^2 von den Raumcurven c^5 und eine kubische Raumcurve c_2^3, mit welcher die c^5 auf ∞^2 Flächen zweiter Ordnung liegen (34.). Diese Flächen bilden (34.) mit jeder Ebene von a

---

$$\alpha_i = a_{0i}+a_{1i}x+a_{2i}y+a_{3i}z; \quad \beta_i = b_{0i}+b_{1i}x+b_{2i}y+b_{3i}z; \quad \text{u. s. w.}$$

Dann ist $\sum_0^4 x_i(\alpha_i+\lambda\beta_i+\mu\gamma_i+\nu\delta_i) = 0$ die Gleichung einer linearen Mannigfaltigkeit $|\Sigma_4|$; dieselbe repräsentirt einen der ∞^4 Räume von $|\Sigma_4|$, wenn den fünf Parametern x_0, $x_1, \dots x_4$ oder vielmehr ihren vier Verhältnissen bestimmte Werthe gegeben werden. Ist eine oder sind zwei oder drei der vier Gleichungen:

$$\sum_0^4 x_i\alpha_i = 0, \quad \Sigma x_i\beta_i = 0, \quad \Sigma x_i\gamma_i = 0, \quad \Sigma x_i\delta_i = 0$$

für irgend welche Werthe der x_i eine Folge der übrigen, so ist der entsprechende Raum von $|\Sigma_4|$ ein einfach bezw. zweifach oder dreifach singulärer, d. h. alle seine Ebenen gehen durch einen Punkt bezw. eine Gerade oder fallen zusammen. Die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \Sigma x_i a_{0i} & \Sigma x_i a_{1i} & \Sigma x_i a_{2i} & \Sigma x_i a_{3i} \\ \Sigma x_i b_{0i} & \Sigma x_i b_{1i} & \cdot & \cdot \\ \Sigma x_i c_{0i} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma x_i d_{0i} & \cdot & \cdot & \Sigma x_i d_{3i} \end{vmatrix} = \Delta$$

verschwindet deshalb für die Parameter x_i jedes singulären Raumes, alle ihre ersten bezw. zweiten Minoren aber verschwinden für die Parameter der zweifach resp. dreifach singulären Räume von $|\Sigma_4|$.

Die ersten Minoren von Δ verschwinden i. A. für 20 Werthensysteme von $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}, \frac{x_4}{x_0}$, sodass i. A. 20 zweifach singuläre Räume in $|\Sigma_4|$ vorkommen. Die Rechnungen, aus welchen dieses folgt, werde ich später (114.) im Zusammenhange mit anderen geben; sie sind den von mir in diesem Journal Bd. 82 S. 56—62 ausgeführten analog.

kubische Ordnungsflächen des zu K^4 gehörigen Gebüsches von $|\Sigma_4|$. Sie schneiden c^{10} in je 20 Punkten, von denen 16 auf einer c^5, die übrigen vier aber auf c_2^3 liegen; und diese vier Punkte A bilden (94.) mit je sechs Punkten von c^{10}, die mit a in einer Ebene liegen, eine Kernpunktgruppe 10 K. Die vier A ändern sich nicht, wenn K^4 mit einer anderen durch a gehenden Kernfläche K_1^4 vertauscht wird; denn K^4 und K_1^4 haben eine c^5 gemein, welche mit ihren Doppelsehnen auf einer die vier Punkte A von c^{10} enthaltenden Fläche zweiter Ordnung liegt.

96. Jeder Axe a von $|\Sigma_4|$ entsprechen (95.) vier Punkte A der Hauptcurve c^{10}. Die ∞^4 Raumcurven c^5, welche mit a Kerncurven von $|\Sigma_4|$ bilden, senden je vier Doppelsehnen durch die vier Punkte A und liegen mit ihnen auf je einer Fläche zweiter Ordnung (95.); durch zwei beliebige Punkte geht (90.) allemal eine dieser c^5. Je sechs mit a in einer Ebene ε liegende Punkte von c^{10} bilden (95.) mit den vier A eine Gruppe 10 K.

Die ∞^2 Mannigfaltigkeiten von $|\varepsilon_{4,3}|$, welche in den zweifach singulären Raum a von $|\Sigma_4|$ die Ebene ε entsenden, bilden einen speciellen Bündel $|\varepsilon_{4,2}|$; die auf $|\varepsilon_{4,2}|$ ruhende $|S_4|$ aber enthält einen auf ε reducirten Ebenenbündel. Die zehn Kernpunkte K von $|S_4|$ und $|\varepsilon_{4,2}|$ bestehen (64 *c.*, 94.) aus sechs Schnittpunkten von ε mit c^{10} und den vier Punkten A. Von $|S_4|$ zerfallen ∞^3 Kerncurven in je zwei kubische Curven c_1^3 und c_2^3, von denen die c_1^3 in ε liegen; ∞^4 Ordnungsflächen von $|S_4|$ bestehen aus ε und je einer Fläche F^2 zweiter Ordnung. Die c_2^3 und F^2 sind die Ordnungscurven und Ordnungsflächen eines tetraedralen Strahlencomplexes, welcher die vier A zu Hauptpunkten hat (64 *c.*). Jede der ∞^4 in ε und eine F^2 zerfallenden Ordnungsflächen enthält (94.) eine Kerncurve c^6 von $|\Sigma_4|$, welche aus a und einer c^5 auf F^2 besteht. Die vier Punkte A und der tetraedrale Complex ändern sich nicht, wenn die Ebene ε um a sich dreht (vgl. 95.).

Die 20 Axen a von $|\Sigma_4|$ können zu vieren mit c^{10} durch Kernflächen verbunden werden. Zu dreien bilden sie Kerncurven mit je einer kubischen Raumcurve, welche die drei a zu Sehnen und acht Punkte mit c^{10} gemein hat.

97. Eine beliebige $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,3}|$ enthält die Ebenen des Raumes je ∞^1 mal. Die ∞^1 Räume von $|\Sigma_4|$, welchen in $|\varepsilon_4|$ irgend eine Ebene φ entspricht, bilden einen Raumbüschel $|\Sigma_1|$, von dessen Haupttetraeder die Ebene φ eine Fläche ist. Sie senden in jede andere Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_4|_1$ von $|\varepsilon_{4,3}|$ einen Büschel f_1 von Ebenen, die in $|\varepsilon_4|_1$ der Ebene φ von $|\varepsilon_4|$

entsprechen; der Complex dieser Büschel f_1 ruht auf $|\Sigma_1|$. Dreht sich φ um eine ihrer Geraden *d*, so beschreibt $|\Sigma_1|$ den Bündel $|\Sigma_2|$ der Räume, welchen in $|\varepsilon_4|$ je eine durch *d* gehende Ebene entspricht; die Hauptpunkte von $|\Sigma_1|$ aber beschreiben die Kerncurve c^6 von $|\Sigma_2|$, und diese hat *d* zur Doppelsehne (25.). Zu *d* nun gehört (27.) ein Punkt *D* von c^6 in der Weise, dass je drei Punkte von c^6, die mit *D* zusammen die Hauptpunkte eines Raumbüschels $|\Sigma_1|$ von $|\Sigma_2|$ bilden, mit *d* in einer Ebene φ liegen. Bei der Drehung von φ ändert deshalb der vierte, φ gegenüber liegende Hauptpunkt *D* von $|\Sigma_1|$ seine Lage nicht.

Jeder nicht singulären $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,3}|$ entspricht auf diese Art ein Punkt *D;* und zwar haben je zwei Räume von $|\Sigma_4|$, welche nach $|\varepsilon_4|$ eine und dieselbe Ebene φ, gleichgültig welche, entsenden, den Punkt *D* entsprechend gemein, und drei beliebige Räume von $|\Sigma_4|$, denen in $|\varepsilon_4|$ drei Ebenen einer Geraden *d* entsprechen, erzeugen eine Kerncurve c^6, von welcher *d* eine Doppelsehne und *D* der entsprechende Punkt ist. Der singuläre Raum von $|\Sigma_4|$, welcher *D* zum Doppelpunkte hat, schickt nach $|\varepsilon_4|$ alle Ebenen von *D*.

In den kubischen Hauptbüscheln der ∞^2 durch $|\varepsilon_4|$ gehenden $|\varepsilon_{4,1}|$ von $|\varepsilon_{4,3}|$ entspricht der $|\varepsilon_4|$ je eine Ebene des Punktes *D* (vgl. 42.).

98. Ist $|\varepsilon_4|$ eine der ∞^1 ausgearteten Mannigfaltigkeiten von $|\varepsilon_{4,3}|$, so besteht sie aus den Ebenen eines Punktes *P* der Hauptcurve c^{10} und enthält dieselben je ∞^2 mal (89.). Die ∞^2 Räume von $|\Sigma_4|$, denen in $|\varepsilon_4|$ oder *P* eine Ebene φ entspricht, bilden einen Bündel $|\Sigma_2|$, dessen Kerncurve in zwei kubische Curven c_1^3 und c_2^3 zerfällt (28*c*.); und zwar liegt c_1^3 in φ, wogegen c_2^3 eine Raumcurve ist. Von den Hauptpunkten der Raumbüschel von $|\Sigma_2|$ liegen je drei auf c_1^3, und die vierten auf c_2^3 (28*c*.). Dreht sich φ um eine Gerade *s* von *P*, so beschreibt $|\Sigma_2|$ ein Raumgebüsch von $|\Sigma_4|$, und c_1^3 dessen durch *s*, c_2^3 und c^{10} gehende Kernfläche K^4; die kubische Raumcurve c_2^3 aber ändert sich nicht (vgl. 34.). Auf c_1^3 liegen hiernach die neun von *P* verschiedenen Schnittpunkte der Hauptcurve c^{10} mit φ, ausserdem drei Punkte von c_2^3. Weil die in c_1^3 und c_2^3 zerfallende Kerncurve 20 Punkte mit c^{10} gemein hat (91.), so enthält c_2^3 eilf Punkte von c^{10}.

99. Jeder ausgearteten Mannigfaltigkeit *P* von $|\varepsilon_{4,3}|$ entspricht also (98.) eine kubische Raumcurve c_2^3, die mit der Hauptcurve c^{10} eilf Punkte gemein hat. Diese c_2^3 bildet mit ∞^2 kubischen Curven c_1^3, die in den Ebenen von *P* liegen, je eine Kerncurve von $|\Sigma_4|$. Jede Ebene φ des

Punktes P schneidet c_2^3 in drei und c^{10} in neun von P verschiedenen Punkten, durch welche eine dieser ∞^2 Curven c_1^3 geht. Mit jeder Geraden s von P können c_2^3 und c^{10} durch eine Kernfläche K^4 verbunden werden (98.), sodass ∞^2 Kernflächen durch c_2^3 gehen. Dieselben schneiden sich büschelweise in den ebenen kubischen Curven c_1^3.

Jede Kernfläche, welche zwei beliebige Punkte von c_2^3 mit c^{10} verbindet, geht durch c_2^3. Die ∞^1 singulären Räume von $|\Sigma_4|$, deren Doppelpunkte auf c_2^3 und nicht zugleich auf c^{10} liegen, sind demnach in jedem durch zwei von ihnen gehenden Gebüsche von $|\Sigma_4|$ enthalten und bilden folglich einen Raumbüschel $|\Sigma_1|$. Der auf $|\Sigma_1|$ ruhende Complex $|u_3|$ besteht aus homologen Ebenenbüscheln der ∞^3 Mannigfaltigkeiten von $|\varepsilon_{4,3}|$; seine ∞^3 Büschel erzeugen zu dreien die Raumcurve c_2^3, haben die ∞^2 Sehnen von c_2^3 zu Axen und sind schaarenweise coaxial und identisch (vgl. 28*c*.).

Durch die 13 Punkte, welche c_2^3 und c^{10} mit einer beliebigen Ebene gemein haben, gehen ∞^2 ebene Curven vierter Ordnung. Diese Curven schneiden sich büschelweise in ∞^2 Punktetripeln, von denen auf jeder Geraden der Ebene eines liegt. Durch 12 der 13 Punkte ist der letzte eindeutig bestimmt *).

100. Durch die kubische Raumcurve c_2^3 gehen ∞^2 Flächen zweiter Ordnung; jede derselben bildet (99., 94.) mit jeder Ebene des Punktes P eine Ordnungsfläche von $|\Sigma_4|$ und schneidet c^{10} in neun Punkten, welche mit P zusammen eine Kernpunktgruppe 10 K bilden. Umgekehrt liegen je neun Punkte von c^{10}, die mit P eine Gruppe 10 K bilden, mit c_2^3 auf einer Fläche zweiter Ordnung (94.).

Verbindet eine Sehne von c_2^3 zwei Punkte P_1, P_2 von c^{10}, die nicht auf c_2^3 liegen, so gehören P, P_1 und P_2 zu ∞^1 Kernpunktgruppen 10 K; die ∞^1 Flächen zweiter Ordnung, welche c_2^3 mit der Sehne verbinden, schneiden c^{10} in den von P verschiedenen Punkten dieser Gruppen. Die ∞^1 durch P, P_1 und eine Kerncurve c^6 gehenden kubischen Ordnungsflächen enthalten auch den Punkt P_2; sie schneiden sich (23.) in c^6 und einer durch P, P_1 und P_2 gehenden kubischen Raumcurve. — Wenn P mit drei in einer Geraden liegenden Punkten von c^{10} zu einer Gruppe 10 K gehört, so liegt die Gerade mit c_2^3 auf einer Fläche zweiter Ordnung und hat folglich mit c_2^3 einen Punkt gemein. Die Verbindungsebene von P und der Geraden

*) *Reye*, die algebraischen Flächen ... (Math. Annalen II, 501).

hat mit c_2^3 noch zwei und mit c^{10} noch sechs Punkte gemein, die (99.) auf einem Kegelschnitte liegen.

Zwei kubische Raumcurven c_2^3, die verschiedenen Punkten P von c^{10} entsprechen, liegen mit c^{10} auf einer Kernfläche K^4. Dieselbe verbindet c^{10} mit zwei Punktepaaren der beiden c_2^3 (vgl. 99., 90.) und jede dieser Curven mit der Sehne s, welche durch den ihr entsprechenden Punkt P an die andere Raumcurve geht (99.).

101. Die sich stützenden Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_4|$ und $|\varepsilon_{4,3}|$ sind durch ihre Hauptcurve c^{10} i. A. völlig bestimmt. Denn zunächst kann c^{10} mit jeder Geraden s, die einen Punkt von c^{10} enthält, durch eine Kernfläche K^4 von $|\Sigma_4|$ verbunden werden; die übrigen Schnittpunkte von c^{10} mit den Ebenen von s liegen auf je einer kubischen Curve c_1^3, deren Ort K^4 ist. Die so bestimmten Kernflächen schneiden sich paarweise in Kerncurven c^6, welche i. A. je einen Raumbündel von Σ_4 bestimmen (26.). Zwei Raumbündel, deren Kerncurven auf derselben Kernfläche K^4 liegen, haben einen Raumbüschel gemein und bestimmen das zu K^4 gehörige Raumgebüsch von $|\Sigma_4|$; durch zwei ihrer Gebüsche aber ist die Mannigfaltigkeit $|\Sigma_4|$ bestimmt.

Die Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_{4,3}|$ hat ∞^4 kubische Hauptbüschel γ^3; zu jedem ihrer Büschel $|\varepsilon_{4,1}|$ gehört ein solcher (39.). Ihre ∞^3 Bündel $|\varepsilon_{4,2}|$ bestimmen (55.) je eine Strahlencongruenz $|d_2'|$ dritter Ordnung sechster Klasse. Doch ist über die gegenseitigen Beziehungen dieser ∞^3 Congruenzen und ∞^4 Hauptbüschel Näheres nicht bekannt.

102. Die Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_4|$ und $|\varepsilon_{4,3}|$ sind speciell und von 36 Parametern abhängig, wenn eine $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,3}|$ in einen Ebenenbüschel s ausartet, oder mit anderen Worten, wenn die ∞^4 Räume von $|\Sigma_4|$ durch eine Gerade s homologe Ebenen schicken. Die ∞^6 Kerncurven c^6 haben in diesem Falle s zur gemeinsamen Doppelsehne (24.), die ∞^4 Kernflächen K^4 gehen alle durch s (34.), und die Hauptcurve c^{10} zerfällt folglich in s und eine Raumcurve c^9 neunter Ordnung. Zwei Kernflächen K^4 haben ausser s und c^9 eine Kerncurve c^6 gemein; sie schneiden eine durch s gehende Ebene φ in s und zwei kubischen Curven c_1^3, von deren neun Schnittpunkten drei auf c^6 (vgl. 34.) und nur die übrigen sechs auf c^9 liegen. Die drei Punkte, welche c^9 ausser diesen sechsen mit φ gemein hat, müssen auf s liegen, und s ist folglich eine Doppelsehne von c^9.

Die ∞^3 Räume von $|\Sigma_4|$, welche die Ebene φ durch s schicken, bilden ein Gebüsch, dessen Kernfläche in φ und eine durch c^9 gehende

kubische Fläche K^3 zerfällt (34*c*.). Die ∞^3 Kerncurven dieses Gebüsches zerfallen in je zwei kubische Curven c_1^3 und c_2^3, von denen c_1^3 in φ liegt und c_2^3 gewunden ist; die kubischen Raumcurven c_2^3 bilden auf K^3 ein Netz (34*c*.). Mit einer beliebigen Kernfläche K^4 hat diese zerfallende ausser s und c^9 eine der ∞^3 zerfallenden Kerncurven gemein. Dreht sich die Ebene φ um s, so ändert auf K^4 der ebene Theil c_1^3 der Kerncurve seine Lage, nicht aber der gewundene Theil c_2^3; denn die kubische Raumcurve c_2^3 bildet (34.) mit jeder kubischen Curve c_1^3 von K^4, die mit s in einer Ebene liegt, eine Kerncurve. Auch die kubische Fläche K^3, der Ort der Curven c_2^3, bleibt folglich ungeändert, wenn φ um s sich dreht; sie bildet mit jeder Ebene von s eine Kernfläche und enthält die Doppelpunkte von ∞^2 singulären Räumen, die in ∞^1 Gebüschen und folglich in einem Raumbündel von $|\Sigma_4|$ liegen. Ein beliebiges Gebüsch von $|\Sigma_4|$ geht durch ∞^1 dieser singulären Räume; dieselben bilden einen Büschel (88.), und ihre Doppelpunkte liegen auf einer der kubischen Raumcurven c_2^3.

Durch jede der ∞^2 Raumcurven c_2^3 gehen ∞^2 Kernflächen K^4, die sich in s, c^9 und büschelweise in je einer kubischen Curve c_1^3 schneiden; diese c_1^3 liegt mit s in einer Ebene und bildet mit der c_2^3 eine Kerncurve c^6. Da nun c^6 mit der Hauptcurve 20 Punkte gemein hat (91.), c_1^3 aber drei Punkte von s und sechs von c^9 enthält, so geht c_2^3 durch eilf Punkte von c^9 und liegt auf jeder Kernfläche, welche zwei beliebige Punkte von c_2^3 verbindet. Jede durch eine c_2^3 gehende Fläche zweiter Ordnung bildet (34.) mit jeder Ebene φ von s eine kubische Ordnungsfläche von $|\Sigma_4|$. Sie schneidet die kubische Fläche K^3 in c_2^3 und einer anderen kubischen Raumcurve c_0^3 (34*c*.), und die Raumcurve c^9 in sieben Punkten K von c_0^3, den Kernpunkten eines Bündels $|\varepsilon_{4,2}|$ von $|\varepsilon_{4,3}|$, welcher die auf den Ebenenbüschel s reducirte $|\varepsilon_4|$ enthält (64*a*.).

102*a*. Die Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_4|$ und $|\varepsilon_{4,3}|$ sind speciell und von 35 Parametern abhängig, wenn die Räume von $|\Sigma_4|$ durch einen Punkt D homologe Strahlen senden, oder wenn alle $|\varepsilon_4|$ eines Büschels von $|\varepsilon_{4,3}|$ in concentrische Ebenenbündel D ausarten. Alle Kernflächen K^4 und ∞^2 singuläre Räume von $|\Sigma_4|$ haben in diesem Falle D zum Doppelpunkte (34*a*.), alle Kerncurven c^6 gehen durch D, und von der Hauptcurve c^{10} ist D ein dreifacher Punkt. Jene ∞^2 singulären Räume bilden in $|\Sigma_4|$ einen Bündel, dessen Kerncurve in sechs durch D gehende Kernstrahlen zerfällt (64*b*.); jeder der letzteren ist Axe eines zweifach singulären Raumes von $|\Sigma_4|$.

Die ∞^1 Kernflächen K^4, welche diese zerfallende Kerncurve mit c^{10} verbinden, haben D zum dreifachen Punkte.

102*b*. Die Mannigfaltigkeit $|\Sigma_4|$ hängt von 35 Parametern ab, wenn einer ihrer Räume auf eine Ebene φ sich reducirt, oder wenn alle $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,3}|$ die Ebene φ entsprechend gemein haben. Die Kernflächen der ∞^3 Gebüsche von $|\Sigma_4|$, in denen jener dreifach singuläre Raum vorkommt, zerfallen (34*c*.) in φ und je eine kubische Fläche K^3. Die ∞^3 Flächen K^3 schneiden sich büschelweise in ∞^4 kubischen Kerncurven c_0^3 (28*e*.) und gehen alle durch eine Raumcurve c_0^6 sechster Ordnung. Die Hauptcurve c^{10} zerfällt in diese c_0^6 und eine in φ liegende Curve c^4 vierter Ordnung, welche die sechs Schnittpunkte von c_0^6 und φ enthält.

In $|\Sigma_4|$ giebt es ∞^3 Büschel perspectiver Räume, von denen φ die Collineationsebene ist. Dem entsprechend gemeinsamen Ebenenbündel von irgend zwei dieser perspectiven Räume entsprechen in den übrigen Räumen von $|\Sigma_4|$ die Bündel eines linearen Complexes $|S_3|$, nicht aber diejenigen einer $|S_4|$, und c_0^6 ist die Kerncurve von $|S_3|$. Die ∞^6 Kerncurven von $|\Sigma_4|$ haben je sechs Punkte mit φ bezw. c^4 und je 14 Punkte mit c_0^6 gemein (91.); sie können mit c_0^6 durch kubische Flächen K^3 verbunden werden.

102*c*. Die $|\Sigma_4|$ hängt von 31 Parametern ab, wenn ihre Räume eine Ebene ε entsprechend gemein haben, oder wenn eine $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,3}|$ auf die Ebene ε sich reducirt. Die ∞^4 Kernflächen zerfallen dann (34*c*.) in ε und je eine kubische Fläche K^3, die ∞^6 Kerncurven aber in je zwei kubische Curven c_1^3 und c_2^3, von denen c_1^3 in ε liegt. Die kubischen Flächen K^3 und Raumcurven c_2^3 enthalten die Doppelpunkte von je ∞^2 bezw. ∞^1 singulären Räumen, die einen Bündel bezw. Büschel von $|\Sigma_4|$ ausmachen (102.). Die ∞^3 singulären Räume von $|\Sigma_4|$ bilden demzufolge ein Gebüsch $|\Sigma_3|$; auch giebt es nicht ∞^4 sondern nur ∞^3 Flächen K^3, und nicht ∞^6 sondern nur ∞^4 Curven c_2^3. Die ∞^3 kubischen Flächen K^3 schneiden sich büschelweise in den ∞^4 kubischen Raumcurven c_2^3 und gehen alle durch eine Raumcurve c_2^6 sechster Ordnung. Auf c_2^6 reducirt sich, abgesehen von ε, die Hauptcurve c^{10}; die c_2^3 haben mit c_2^6 je acht Punkte gemein (23.).

102*d*. Von 34 Parametern hängen $|\Sigma_4|$ und $|\varepsilon_{4,3}|$ ab, wenn die Räume eines Büschels von $|\Sigma_4|$ in coaxiale Ebenenbüschel l ausarten, oder wenn alle $|\varepsilon_4|$ von $|\varepsilon_{4,3}|$ eine Gerade l entsprechend gemein haben. Die ∞^4 Kernflächen K^4 gehen dann (34.) alle durch l, und ∞^2 derselben haben l zur Doppelpunktsgeraden (34*d*.) und mit den Ebenen von l noch je einen

Kegelschnitt gemein. Von den ∞^6 Kerncurven c^6 zerfallen ∞^5 in l und Raumcurven fünfter Ordnung, welche auf je einer Fläche zweiter Ordnung liegen (28*d.*), und ∞^2 von ihnen bestehen aus je einer kubischen Raumcurve und der dreifachen Geraden l (28*f.*). Die Hauptcurve c^{10} zerfällt in l und eine Raumcurve neunter Ordnung, welche sechs Punkte mit l gemein hat.

102*e.* Die $|\Sigma_4|$ ist von 31 Parametern abhängig, wenn ihre Räume einen Punkt P entsprechend gemein haben, oder mit anderen Worten, wenn die $|\varepsilon_4|$ eines Bündels $|\varepsilon_{4,2}|$ von $|\varepsilon_{4,3}|$ in concentrische Ebenenbündel P ausarten. In diesem Falle haben ∞^3 singuläre Räume von $|\Sigma_4|$ den Punkt P zum Doppelpunkt; dieselben bilden ein „singuläres" Gebüsch $|\Sigma_3|_0$, und jeder Raumbüschel von $|\Sigma_4|$ enthält einen von ihnen. Die ∞^6 Kerncurven c^6 haben P zum dreifachen Punkte (28*a.*) und werden aus ihm durch kubische Kegel projicirt; die ∞^3 Kerncurven des singulären Gebüsches $|\Sigma_3|_0$ jedoch zerfallen (64*b.*) in je sechs durch P gehende Kernstrahlen k, von denen jeder die Axe eines zweifach singulären Raumes von $|\Sigma_4|$ ist. Der Ort dieser Kernstrahlen ist ein Kegel vierter Ordnung, die Kernfläche K_0^4 des singulären Gebüsches $|\Sigma_3|_0$. Die übrigen ∞^4 Kernflächen K^4 von $|\Sigma_4|$ schneiden diesen „Kernkegel" in c^{10} und je sechs Kernstrahlen k und haben P zum dreifachen Punkte. Die Hauptcurve c^{10} hat P zum sechsfachen Punkte und wird aus P durch den Kernkegel K_0^4 projicirt.

102*f.* Die Mannigfaltigkeit $|\Sigma_4|$ hängt i. A. von 34 Parametern ab, wenn ihre ∞^4 Räume nach jedem Punkte einer Geraden w homologe Ebenen schicken, wenn also die Punktreihe w zu ∞^4 homologen kubischen Ebenenbüscheln der Räume perspective Lage hat. Alle Kernflächen K^4 gehen dann durch w, und die Hauptcurve c^{10} zerfällt in w und eine Raumcurve c^9 neunter Ordnung. Die Punkte von w sind Doppelpunkte von je ∞^1 singulären Räumen der $|\Sigma_4|$. Die Kerncurve c^6 eines Raumbündels, welcher drei dieser singulären Räume verbindet, hat w zur Doppelsehne und wird von einer durch w gelegten Ebene φ in nur drei ausserhalb w gelegenen Punkten geschnitten. Zwei durch c^6 gehende Kernflächen von $|\Sigma_4|$ aber haben mit φ ausser w noch zwei kubische Curven gemein, von deren neun Schnittpunkten drei auf c^6 und nur sechs auf c^9 liegen. Die übrigen drei Schnittpunkte von c^9 und φ müssen auf w liegen; w ist also eine Doppelsehne der Raumcurve c^9.

102*g.* Von 28 Parametern hängen $|\Sigma_4|$ und $|\varepsilon_{4,3}|$ ab, wenn die Räume von $|\Sigma_4|$ eine Gerade l entsprechend gemein haben, oder wenn die Mannig-

faltigkeiten eines $|\varepsilon_4|$-Büschels von $|\varepsilon_{4,3}|$ auf den Ebenenbüschel l sich reduciren. Die ∞^6 Kerncurven c^6 zerfallen dann in die Gerade l und ∞^6 Raumcurven fünfter Ordnung, welche mit l je vier Punkte gemein haben (28*b*.); die ∞^4 Kernflächen haben l zur Doppelpunktsgeraden (34*d*.). Die Hauptcurve c^{10} besteht demnach aus der dreifachen Geraden l und einer Raumcurve c^7 siebenter Ordnung, welche mit l vier Punkte gemein hat (vgl. 102.). Durch l und c^7 gehen ∞^1 kubische Flächen K^3; jede derselben bildet mit jeder Ebene von l eine Kernfläche von $|\Sigma_4|$ und enthält die Doppelpunkte von ∞^2 singulären Räumen, die einen Raumbündel von $|\Sigma_4|$ ausmachen (102.).

VI.

Fast alle bisherigen Ergebnisse unserer Untersuchung verdanken wir der synthetischen Methode. Sie wies unserer Forschung überall die gangbarsten Wege, lediglich mit ihrer Hülfe haben wir die projectiven Grundgebilde zu unendlichen linearen Mannigfaltigkeiten zusammengefasst und letztere stufenweise aufgebaut, sie schuf uns für die Geometrie dieser Mannigfaltigkeiten eine sichere Grundlage. Für die räumliche Anschauung ist die synthetische Methode unbestritten die beste Stütze; von ihr geleitet erkennen wir den inneren Zusammenhang der Raumgebilde und ihrer Erzeugnisse am deutlichsten und klarsten.

Ganz andere Vorzüge bietet die analytische Methode, indem sie unzählige und sehr verschiedenartige Raumgebilde durch Formeln darstellt und der Rechnung unterwirft. Insbesondere giebt sie über gewisse, für diese Gebilde wichtige Zahlen, z. B. über die Anzahl der sie bestimmenden Elemente, über Ordnung und Klasse von Curven, Flächen und anderen Gebilden, viel leichter Aufschluss als die synthetische Methode. Man denke nur an die Anzahl der Punkte, durch welche eine Fläche $n$ter Ordnung bestimmt ist; wie leicht ergiebt sich diese Zahl analytisch durch Abzählen der Coefficienten einer Gleichung, während sie rein synthetisch für Flächen zweiter Ordnung nicht ohne Schwierigkeit, für kubische und höhere Flächen aber bislang überhaupt nicht ermittelt werden konnte.

Auch bei unseren linearen Mannigfaltigkeiten projectiver Grundgebilde und bei deren Erzeugnissen konnten und können wir die Analysis nicht entbehren, wenn es sich um Anzahlen handelt. Wir werden nun in diesem letzten Theile unserer Untersuchungen zunächst noch die Mannigfaltigkeit

$|\Sigma_5|$ synthetisch behandeln, sodann aber die höheren linearen Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_n|$ collinearer Räume und die bemerkenswertheren, von ihnen abhängigen oder sie bestimmenden Gebilde analytisch darstellen und die für sie wichtigsten Zahlen berechnen. Die analytische Theorie der $|\Sigma_n|$ wird uns zu merkwürdigen, bisher wenig beachteten Systemen algebraischer Gleichungen führen, die auch an sich wohl der Erörterung werth sind, zumal da sie auch anderweitig auftreten*). Im Verlaufe der Rechnung wird sich ergeben, dass die Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_n|$ und $|\Sigma_{14-n}|$ in dualem Gegensatze zu einander stehen, indem die von ihnen abhängenden bezw. von ihnen erzeugten oder sie bestimmenden Raumcurven und räumlichen Ebenenbüschel, Flächen oder Strahlengebilde zu einander reciprok sind. Uebrigens hängen $|\Sigma_n|$ und $|\Sigma_{14-n}|$ auch von gleichviel Parametern ab.

Von den höheren Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_n|$ besprechen wir schliesslich nur noch die $|\Sigma_6|$ ausführlicher; bei den übrigen beschränken wir uns der Kürze halber auf eine Uebersicht ihrer wichtigeren, aus dem Vorhergehenden sich ergebenden Eigenschaften.

§ 17.

Die lineare Mannigfaltigkeit $|\Sigma_5|$ von ∞^5 collinearen Räumen und das $|\varepsilon_5|$-Gebüsch $|\varepsilon_{5,3}|$.

103. Eine lineare Mannigfaltigkeit $|\Sigma_5|$ besteht aus ∞^5 collinearen Räumen und ist durch beliebige sechs derselben bestimmt; sie enthält (36.) ∞^8 Raumbüschel $|\Sigma_1|$, ∞^9 Bündel $|\Sigma_2|$, ∞^8 Gebüsche $|\Sigma_3|$ und ∞^5 lineare Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_4|$ nebst deren ∞^8 Haupttetraedern, ∞^9 Kerncurven c^6, ∞^8 Kernflächen K^4 und ∞^5 Hauptcurven c^{10}. Auf $|\Sigma_5|$ ruht ein Gebüsch $|\varepsilon_{5,3}|$ von ∞^3 collinearen Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_5|$, die aus je ∞^5 homologen Ebenen der Räume von $|\Sigma_5|$ bestehen. Die $|\Sigma_4|$ von $|\Sigma_5|$ haben zu zweien, dreien, vieren oder fünfen i. A. ein Gebüsch, einen Bündel, einen Büschel bezw. einen Raum gemein (35.).

Die Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_5|$ und $|\varepsilon_{5,3}|$ hängen i. A. von 45 Parametern ab.

104. Je zwei der ∞^5 Hauptcurven c^{10} zehnter Ordnung von $|\Sigma_5|$ können durch eine Fläche vierter Ordnung verbunden werden, nämlich durch die Kernfläche K^4 des Raumgebüsches, in welchem die zugehörigen

*) Vgl. die Abhandlung von Herrn *W. Stahl* über die Fundamental-Involutionen auf rationalen Curven in Bd. 104 und meine Arbeit über lineare Systeme und Gewebe von Flächen zweiten Grades in Bd. 82 dieses Journals.

beiden $|\Sigma_4|$ von $|\Sigma_5|$ sich durchdringen. Durch jede Hauptcurve c^{10} gehen ∞^4 Kernflächen K^4 (89.), und auf jeder Kernfläche liegen ∞^1 Hauptcurven. Durch jede Kerncurve c^6 von $|\Sigma_5|$ gehen ∞^2 Kernflächen K^4, die sich büschelweise in ∞^2 Hauptcurven c^{10} schneiden (vgl. 90.); denn in $|\Sigma_5|$ gehen (36.) durch jeden Raumbündel ∞^2 Gebüsche $|\Sigma_3|$ und Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_4|$, letztere aber enthalten je ∞^1 jener Gebüsche.

Drei beliebige Hauptcurven c^{10} liegen paarweise auf drei Kernflächen, die eine Raumcurve sechster Ordnung gemein haben, nämlich die Kerncurve c^6 des Raumbündels, in welchem die zugehörigen drei $|\Sigma_4|$ von $|\Sigma_5|$ sich durchdringen. Jede der drei c^{10} hat zwanzig Punkte mit c^6 gemein (91.); durch ihre übrigen 20 Schnittpunkte H mit der Kernfläche K^4, welche die anderen beiden c^{10} verbindet, gehen die drei und überhaupt alle Hauptcurven c^{10}. In jedem dieser 20 Punkte H schneiden sich homologe Ebenen aller Räume von $|\Sigma_5|$.

In sechs collinearen Räumen giebt es demnach i. A. 20 Gruppen homologer Ebenen, die durch je einen Punkt gehen.

105. Die sich stützenden Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_5|$ und $|\epsilon_{5,3}|$ haben i. A. zwanzig *„Hauptpunkte“* H, durch welche alle ihre Hauptcurven c^{10} und Kernflächen K^4 gehen (104.). In jedem Hauptpunkte H schneiden sich ∞^5 homologe Ebenen der Räume von $|\Sigma_5|$; auf die 20 Ebenenbündel H reduciren sich folglich zwanzig singuläre $|\epsilon_5|$ von $|\epsilon_{5,3}|$. Die 20 Punkte H können mit jeder Kerncurve c^6 von $|\Sigma_5|$ durch ∞^2 Kernflächen verbunden werden (104.). Es giebt ∞^4 singuläre Räume in $|\Sigma_5|$, und zwar ist ein beliebiger Punkt von ∞^1, jeder Hauptpunkt H aber von ∞^2 dieser Räume der Doppelpunkt. Der Bündel singulärer Räume von $|\Sigma_5|$, deren Doppelpunkt ein Hauptpunkt H ist, ruht auf einem Complexe $|S_3|$ concentrischer Bündel, und seine Kerncurve zerfällt (64*b.*) in sechs durch H gehende Kernstrahlen k; sechs seiner Räume sind zweifach singulär und haben die sechs Strahlen k zu Axen. Die sechs k können mit den übrigen 19 Hauptpunkten H durch ∞^2 Kernflächen verbunden werden; diese aber und die ∞^2 Hauptcurven c^{10}, in denen sie sich büschelweise schneiden (104.), haben H zum dreifachen Punkte.

Die Verbindungslinie zweier Hauptpunkte H_1, H_2 ist entsprechend gemeinsamer Strahl der ∞^3 Räume eines speciellen Gebüsches $|\Sigma_3|$ von $|\Sigma_5|$ und folglich (34*d.*) Doppelpunktsgerade einer speciellen Kernfläche K^4, die auch durch die 18 übrigen Hauptpunkte geht. Denn der specielle

$|\varepsilon_5|$-Büschel von $|\varepsilon_{5,3}|$, welcher die beiden, auf die Bündel H_1 und H_2 reducirten $|\varepsilon_5|$ enthält, ruht auf einer $|u_5|$, deren ∞^5 Ebenenbüschel durch H_1 und H_2 homologe Ebenen schicken, und von welcher ∞^3 Büschel die Gerade H_1H_2 zur Axe haben (48*b*.); diese coaxialen Büschel aber entsprechen einander in ∞^3 Räumen von $|\Sigma_5|$, welche die Gerade H_1H_2 entsprechend gemein haben und jenes specielle Gebüsch $|\Sigma_3|$ bilden. — In $|\Sigma_3|$ sind die ∞^2 singulären Räume von $|\Sigma_5|$ enthalten, deren Doppelpunkte mit H_1 und H_2 in der Geraden liegen.

106. Fünf Räume von $|\Sigma_5|$ bestimmen i. A. eine $|\Sigma_4|$ und deren Hauptcurve c^{10}; und zwar liegt c^{10} auf den Kernflächen von je vier der fünf Räume und geht durch die 20 Hauptpunkte H sowie durch jeden Punkt, welcher etwa von zwei der fünf Räume ein Doppelpunkt ist. Zwei beliebige Punkte A, B können deshalb mit den 20 H durch ∞^1 Hauptcurven c^{10} verbunden werden; letztere liegen auf einer Kernfläche K^4, welche A und B zu Doppelpunkten hat (34*a*.). Jede dieser c^{10} kann mit vier beliebigen Punkten durch eine Kernfläche verbunden werden (90.); überhaupt aber gehen durch sechs Punkte i. A. ∞^2 Kernflächen von $|\Sigma_5|$. Geht durch den Punkt A die Axe eines zweifach singulären Raumes von $|\Sigma_5|$, so hat dieselbe mit den ∞^3 durch A gehenden Hauptcurven je vier Punkte gemein (95.).

In $|\Sigma_5|$ giebt es ∞^1 zweifach singuläre Räume, deren Axen wir die „Axen von $|\Sigma_5|$" nennen; jede $|\Sigma_4|$ von $|\Sigma_5|$ enthält i. A. zwanzig von ihnen (95.). Der Ort der Axen a von $|\Sigma_5|$ ist eine Fläche [zwanzigsten Grades], welche (105.) die 20 Hauptpunkte zu sechsfachen Punkten hat; ausser diesen 20 H hat sie mit den Hauptcurven c^{10} noch je 80 Punkte gemein, die zu vieren auf 20 Axen a liegen (95.). Die ∞^1 Axen a können zu vieren mit den 20 Hauptpunkten durch Kernflächen K^4 verbunden werden; zu fünfen bestimmen sie je eine Hauptcurve c^{10} als deren Quadrisecanten.

107. Eine beliebige $|\varepsilon_5|$ von $|\varepsilon_{5,3}|$ enthält die Ebenen des Raumes je ∞^2 mal. Die ∞^2 Räume von $|\Sigma_5|$, denen in $|\varepsilon_5|$ irgend eine Ebene ε entspricht, bilden einen Raumbündel, dessen Kerncurve in zwei kubische Curven c_1^3 und c_2^3 zerfällt (28*c*.); und zwar liegt c_1^3 in ε, während c_2^3 eine Raumcurve ist. Dreht sich ε um eine ihrer Geraden s, so beschreibt der Raumbündel ein specielles Gebüsch, und c_1^3 dessen durch s und c_2^3 gehende Kernfläche K^4; die kubische Raumcurve c_2^3 aber ändert sich nicht (34.), sondern bildet mit den ∞^1 kubischen Schnittcurven von K^4, deren Ebenen

durch s gehen, je eine Kerncurve c^6. Ueberhaupt ist c_2^3 Bestandtheil von ∞^3 Kerncurven, und mit den 20 Hauptpunkten H auf ∞^4 Kernflächen von $|\Sigma_5|$ gelegen; mit jeder Geraden s des Raumes kann c_2^3 durch eine dieser Kernflächen verbunden werden. Die Punkte von c_2^3 sind Doppelpunkte von ∞^1 singulären Räumen der $|\Sigma_5|$; diese Räume bilden einen Büschel, weil ∞^3 Raumbündel von $|\Sigma_5|$ in ihnen sich durchdringen.

Jeder nicht ausgearteten $|\varepsilon_5|$ von $|\varepsilon_{5,3}|$ entspricht hiernach ein Büschel singulärer Räume von $|\Sigma_5|$ und zugleich eine kubische Raumcurve c_2^3 als Ort der Doppelpunkte dieser Räume. Je drei Räume von $|\Sigma_5|$, welchen in $|\varepsilon_5|$ eine beliebige Ebene ε entspricht, bestimmen i. A. einen Raumbündel, welcher den Büschel singulärer Räume enthält, und von dessen Kerncurve die c_2^3 einen Bestandtheil bildet. Weil je zwei Raumbüschel von $|\Sigma_5|$ in einem Gebüsche liegen, so können die ∞^3 kubischen Raumcurven c_2^3 paarweise durch Kernflächen verbunden werden.

108. Ist $|\varepsilon_5|$ eine der 20 ausgearteten oder singulären Mannigfaltigkeiten von $|\varepsilon_{5,3}|$, so enthält sie die Ebenen eines Hauptpunktes H je ∞^3 mal (105.). Die ∞^3 Räume von $|\Sigma_5|$, denen alsdann eine beliebige Ebene ε von $|\varepsilon_5|$ oder H entspricht, bilden ein Gebüsch, dessen Kernfläche in ε und eine kubische Fläche K^3 zerfällt (34*c*.). Ihre ∞^3 Kerncurven zerfallen in je zwei kubische Curven c_1^3 und c_2^3, und zwar liegen die c_1^3 in ε, während die c_2^3 ein Netz kubischer Raumcurven auf K^3 bilden (34*c*.). Die kubische Fläche K^3 ändert sich nicht, wenn ε um H sich dreht (vgl. 102.); sie bildet mit jeder Ebene des Hauptpunktes H eine Kernfläche von $|\Sigma_5|$, geht durch die übrigen 19 Hauptpunkte (105.) und enthält die Doppelpunkte von ∞^2 singulären Räumen, die einen Raumbündel von $|\Sigma_5|$ ausmachen. Die Strahlen s von H bilden zerfallende Hauptcurven mit je einer auf K^3 liegenden Raumcurve c^9 neunter Ordnung (102.); jede dieser c^9 geht durch die übrigen 19 Hauptpunkte und (102.) durch die drei Schnittpunkte von K^3 mit der zugehörigen Geraden s. Jedem der 20 Hauptpunkte H entspricht hiernach eine, die 19 übrigen verbindende, kubische Fläche K^3, sowie ein Bündel singulärer Räume von $|\Sigma_5|$, von deren Doppelpunkten K^3 der Ort ist.

Die ∞^4 Büschel $|\varepsilon_{5,1}|$ von $|\varepsilon_{5,3}|$ haben (46.) je eine Hauptfläche Φ^2 zweiter Klasse, und zu den ∞^3 Bündeln $|\varepsilon_{5,2}|$ von $|\varepsilon_{5,3}|$ gehört (67.) je ein kubischer Strahlencomplex $|d_3|$, welcher, wie leicht einzusehen ist, die ∞^1 Axen von $|\Sigma_5|$ enthält. Doch ist über die gegenseitigen Beziehungen dieser ∞^4 Hauptflächen und ∞^3 Complexe Näheres nicht bekannt.

109. Die Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_5|$ und $|\varepsilon_{5,3}|$ sind speciell und von 39 Parametern abhängig, wenn eine $|\varepsilon_5|$ von $|\varepsilon_{5,3}|$ in einen Ebenenbüschel s ausartet, oder die ∞^5 Räume von $|\Sigma_5|$ durch eine Gerade s homologe Ebenen schicken. Jede Hauptcurve c^{10} zerfällt alsdann (102.) in s und eine Raumcurve c^9 neunter Ordnung; die ∞^5 Curven c^9 aber haben mit s je drei Punkte gemein und liegen auf je einer kubischen Fläche K^3, die mit jeder Ebene von s eine Kernfläche von $|\Sigma_5|$ bildet. Uebrigens giebt es nicht ∞^5, sondern nur ∞^3 solche kubische Flächen K^3, indem dieselben je ∞^2 Hauptcurven c^9 enthalten. Denn jede K^3 ist (102.) der Ort der Doppelpunkte von ∞^2 singulären Räumen, die einen Raumbündel von $|\Sigma_5|$ ausmachen; durch diesen Bündel aber gehen ∞^2 Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_4|$ von $|\Sigma_5|$, deren Hauptcurven c^9 alle auf K^3 liegen.

Die ∞^4 Räume von $|\Sigma_5|$, welche eine beliebige Ebene ε von s entsprechend gemein haben, bilden (102*c.*) eine specielle $|\Sigma_4|$, deren Kernflächen in ε und je eine kubische Fläche K^3 zerfallen, und deren Hauptcurve sich, abgesehen von ε, auf eine Raumcurve c_2^6 sechster Ordnung reducirt. Die kubischen Flächen K^3 gehen alle durch c_2^6 und schneiden sich büschelweise in ∞^4 kubischen Raumcurven c_2^3; sie sind mit den vorhin gefundenen identisch, bleiben also nebst c_2^6 ungeändert, wenn die Ebene ε um s sich dreht. Die ∞^3 singulären Räume der speciellen $|\Sigma_4|$ bilden ein Gebüsch (102*c.*). Letzteres hat mit jeder anderen $|\Sigma_4|$ von $|\Sigma_5|$ einen Bündel singulärer Räume gemein, und c_2^6 liegt folglich mit jeder Hauptcurve c^9 auf einer der kubischen Flächen K^3.

Diese K^3 wird von einer beliebigen Kernfläche der zu c^9 gehörigen $|\Sigma_4|$ in c^9 und einer kubischen Raumcurve c_2^3 geschnitten; c_2^6 aber hat mit derselben Kernfläche i. A. 24 Punkte gemein. Acht dieser Punkte liegen (102*c.*) auf c_2^3; die übrigen sechzehn aber sind Schnittpunkte von c_2^6 und c^9, und Hauptpunkte von $|\Sigma_5|$. Ausser den Punkten der Geraden s hat also diese specielle $|\Sigma_5|$ i. A. sechzehn Hauptpunkte H, durch welche homologe Ebenen ihrer ∞^5 Räume, die Curve c_2^6 und alle Hauptcurven c^9 und Kernflächen K^4 gehen.

109*a*. Andere Specialfälle von $|\Sigma_5|$, auf die wir nicht näher eingehen, treten ein, wenn von den 20 Hauptpunkten vier in einer Ebene oder drei in einer Geraden liegen, wenn die Räume von $|\Sigma_5|$ einen Punkt, eine Gerade oder eine Ebene entsprechend gemein haben, wenn sie nach einem Punkte oder in eine Ebene homologe Strahlen senden, wenn einer von ihnen sich auf eine Ebene reducirt, u. s. w.

§ 18.

Analytisches über die linearen Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_n|$ collinearer Räume.

110. Wir bezeichnen mit $\varkappa$, λ, μ, ν, ϱ, τ willkürliche Parameter und mit α, β, α_i, β_i, γ_i, δ_i lineare Functionen der Punktcoordinaten x, y, z, setzen also:

$$(1.)\quad \begin{cases} \alpha_i = a_{0i}+a_{1i}x+a_{2i}y+a_{3i}z, & \alpha = a_0+a_1x+a_2y+a_3z, \\ \beta_i = b_{0i}+b_{1i}x+b_{2i}y+b_{3i}z, & \beta = b_0+b_1x+b_2y+b_3z, \\ \gamma_i = c_{0i}+c_{1i}x+c_{2i}y+c_{3i}z, & \\ \delta_i = d_{0i}+d_{1i}x+d_{2i}y+d_{3i}z. & \end{cases}$$

Dann repräsentiren die Gleichungen:

$$\alpha_i+\lambda\beta_i+\mu\gamma_i+\nu\delta_i = 0, \quad \text{worin} \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ n,$$

$n+1$ collineare Räume, zugleich aber, wenn den Parametern λ, μ, ν bestimmte Werthe beigelegt werden, $n+1$ homologe Ebenen dieser Räume. Durch die $n+1$ collinearen Räume ist eine lineare Mannigfaltigkeit $|\Sigma_n|$ von ∞^n collinearen Räumen bestimmt, welche durch die Gleichung:

$$(2.)\quad \sum_0^n \varkappa_i(\alpha_i+\lambda\beta_i+\mu\gamma_i+\nu\delta_i) = 0$$

dargestellt wird; und zwar repräsentirt diese Gleichung einen beliebigen Raum von $|\Sigma_n|$, wenn den $n+1$ Parametern $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, ... $\varkappa_n$ oder vielmehr deren n Verhältnissen bestimmte Werthe beigelegt werden.

Eine Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_n|$ von ∞^n homologen Ebenen der Räume von $|\Sigma_n|$ wird durch (2.) dargestellt, wenn man den Parametern λ, μ, ν bestimmte Werthe ertheilt. Die trilineare Gleichung (2.) repräsentirt also ausser $|\Sigma_n|$ auch das auf $|\Sigma_n|$ ruhende $|\varepsilon_n|$-Gebüsch $|\varepsilon_{n,3}|$, und insbesondere für $n = 1$, 2 oder 3 einen linearen Büschelcomplex $|u_3|$, einen Bündelcomplex $|S_3|$ bezw. ein Raumgebüsch $|T_3|$.

111. Die Ebenen $\Sigma\varkappa_i\alpha_i+\lambda\Sigma\varkappa_i\beta_i+\mu\Sigma\varkappa_i\gamma_i+\nu\Sigma\varkappa_i\delta_i = 0$ eines Raumes $(\varkappa_0, \varkappa_1, \dots, \varkappa_n)$ von $|\Sigma_n|$ gehen alle durch einen Punkt, und dieser Raum artet aus in einen Bündel, wenn die vier Ebenen:

$$(3.)\quad \sum_0^n \varkappa_i\alpha_i = 0, \quad \Sigma\varkappa_i\beta_i = 0, \quad \Sigma\varkappa_i\gamma_i = 0, \quad \Sigma\varkappa_i\delta_i = 0$$

in einem Punkte, dem Doppelpunkte des singulären Raumes, sich schneiden, wenn also die Determinante:

$$(4.)\qquad \varDelta = \begin{vmatrix} \Sigma\varkappa_i a_{0i} & \Sigma\varkappa_i a_{1i} & \Sigma\varkappa_i a_{2i} & \Sigma\varkappa_i a_{3i} \\ \Sigma\varkappa_i b_{0i} & \cdot & \cdot & \Sigma\varkappa_i b_{3i} \\ \Sigma\varkappa_i c_{0i} & \cdot & \cdot & \Sigma\varkappa_i c_{3i} \\ \Sigma\varkappa_i d_{0i} & \cdot & \cdot & \Sigma\varkappa_i d_{3i} \end{vmatrix}$$

Null ist. Da $\varDelta$ für die Parameter $\varkappa_i$ vom vierten Grade ist, so bilden die einfach singulären Räume von $|\Sigma_n|$ eine biquadratische Mannigfaltigkeit $(n-1)$ter Stufe.

Ein Raumbüschel $|\Sigma_1|$ insbesondere enthält i. A. vier ausgeartete Räume. Die Doppelpunkte derselben sind die vier Hauptpunkte von $|\Sigma_1|$, ihre Coordinaten genügen den vier Gleichungen (3.) sowie der dreifachen Gleichung:

$$(5.)\qquad \frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{\gamma_0}{\gamma_1} = \frac{\delta_0}{\delta_1} \quad \text{oder} \quad \left\|\begin{matrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \end{matrix}\right\| = 0,$$

welche für $n = 1$ durch Eliminirung von $\varkappa_0$ und $\varkappa_1$ aus (3.) sich ergiebt. Alle zweireihigen Determinanten der Matrix (5.) verschwinden für die Coordinaten der vier Hauptpunkte.

112. Ein Raumbündel $|\Sigma_2|$ enthält ∞^1 singuläre Räume, deren Doppelpunkte der aus (3.) folgenden Doppelgleichung:

$$(6.)\qquad \left\|\begin{matrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{matrix}\right\| = 0$$

durch ihre Coordinaten genügen, d. h. alle in dieser Matrix enthaltenen dreireihigen Determinanten zu Null machen. Nun folgt aber (6.) aus:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \delta_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \end{vmatrix} = 0,$$

wenn nicht $\frac{\alpha_0}{\beta_0} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$ ist. Der Ort der Doppelpunkte jener singulären Räume, die sogenannte Kerncurve c^6 von $|\Sigma_2|$, ist demnach partieller Schnitt von zwei kubischen Flächen, die ausserdem eine kubische Raumcurve:

$$\left\|\begin{matrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \end{matrix}\right\| = 0$$

gemein haben; sie ist von der sechsten Ordnung und wird durch die Doppelgleichung (6.) dargestellt.

Ein Raumgebüsch $|\Sigma_3|$ enthält ∞^2 singuläre Räume, deren Parameter der Gleichung $\Delta = 0$ genügen. Die Kernfläche K^4 von $|\Sigma_3|$, der Ort der Doppelpunkte dieser Räume, hat die biquadratische Gleichung:

$$(7.)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

welche für $n = 3$ durch Eliminirung von x_0, x_1, x_2, x_3 aus (3.) sich ergiebt.

113. Eine $|\Sigma_4|$ enthält ∞^3 singuläre Räume. Ihre ∞^4 biquadratischen Kernflächen K^4 durchdringen sich in der Hauptcurve c^{10}, deren Doppelgleichung die Form hat:

$$(8.)\qquad \begin{Vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & . & . & \alpha_4 \\ \beta_0 & \beta_1 & . & . & \beta_4 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & . & . & \gamma_4 \\ \delta_0 & \delta_1 & . & . & \delta_4 \end{Vmatrix} = 0;$$

denn die fünf Determinanten dieser Matrix verschwinden für fünf Kernflächen von $|\Sigma_4|$ und somit für alle gemeinsamen Punkte derselben.

Da (8.) sich ergiebt aus:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_4 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_4 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{falls nicht} \quad \begin{Vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 \end{Vmatrix} = 0$$

ist, so ist die Hauptcurve von der zehnten Ordnung als partieller Schnitt zweier Kernflächen vierter Ordnung, die noch eine Raumcurve c^6 sechster Ordnung gemein haben (vgl. 112.).

Eine $|\Sigma_5|$ enthält ∞^4 singuläre Räume; ihre ∞^5 Hauptcurven c^{10} und ∞^8 Kernflächen K^4 schneiden sich in den Hauptpunkten H, deren Coordinaten der dreifachen Gleichung:

$$(9.)\qquad \begin{Vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & . & . & . & \alpha_5 \\ \beta_0 & \beta_1 & . & . & . & \beta_5 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & . & . & . & \gamma_5 \\ \delta_0 & \delta_1 & . & . & . & \delta_5 \end{Vmatrix} = 0$$

genügen, nämlich alle vierreihigen Determinanten dieser Matrix zu Null

machen. Nun folgt aber (9.) aus der Doppelgleichung (8.) und der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_5 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_5 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_5 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_5 \end{vmatrix} = 0,$$

falls nicht:

$$\begin{Vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix} = 0$$

wird, ohne dass die Determinanten der Matrix $\begin{Vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \end{Vmatrix}$ verschwinden. Die dreifache Gleichung (9.) hat deshalb im Allgemeinen $10.4-(6.4-4) = 40-20 = 20$ Lösungen, und $|\Sigma_5|$ hat i. A. zwanzig Hauptpunkte H.

114. Von der Mannigfaltigkeit $|\Sigma_n|$ ist ein Raum zweifach singulär, d. h. seine Ebenen (λ, μ, ν) gehen alle durch eine Gerade und bilden einen Büschel, wenn die vier Ebenen (3.):

$$\sum_0^n x_i\alpha_i = 0, \quad \Sigma x_i\beta_i = 0, \quad \Sigma x_i\gamma_i = 0, \quad \Sigma x_i\delta_i = 0$$

in einer Geraden sich schneiden und demgemäss alle ersten Minoren der Determinante $\varDelta$ verschwinden; er reducirt sich auf eine Ebene und ist dreifach singulär, wenn alle zweiten Minoren von $\varDelta$ Null sind. Hieraus können wir folgern, dass eine $|\Sigma_4|$ i. A. zwanzig zweifach, eine $|\Sigma_9|$ aber i. A. zwanzig dreifach singuläre Räume enthält.

Setzen wir nämlich zur Abkürzung:

$$\sum_0^4 x_i a_{0i} = A_0, \quad \sum_0^4 x_i a_{1i} = A_1, \quad \ldots, \quad \Sigma x_i d_{3i} = D_3,$$

und somit:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ D_0 & D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix}.$$

Dass alle ersten Minoren von $\varDelta$ verschwinden, folgt dann aus den vier kubischen Gleichungen:

$$(\alpha.)\quad \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & C_1 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_3 \\ C_0 & C_1 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ D_0 & D_1 & D_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_0 & A_2 & A_3 \\ C_0 & C_2 & C_3 \\ D_0 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} = 0,$$

falls nicht entweder:

$$(\beta.)\quad \begin{Vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} A_0 & A_2 & A_3 \\ C_0 & C_2 & C_3 \\ D_0 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} = 0$$

ist, oder:

$$(\gamma.)\quad \begin{Vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ D_0 & D_1 & D_2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

$$(\delta.)\quad \begin{Vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} A_0 & A_2 & A_3 \\ C_0 & C_2 & C_3 \\ D_0 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

$$(\varepsilon.)\quad \begin{Vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_3 \\ C_0 & C_1 & C_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder endlich:

$$(\varphi.)\quad \begin{Vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & C_1 & \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} A_0 & A_2 & A_3 \\ C_0 & C_2 & C_3 \\ D_0 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Denn unter diesen Voraussetzungen folgt aus den ersten drei Gleichungen $(\alpha.)$:

$$\begin{Vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \end{Vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{Vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{Vmatrix} = 0;$$

aus diesen Gleichungen und der vierten Gleichung $(\alpha.)$ aber ergiebt sich, dass auch alle übrigen ersten Minoren von $\varDelta$, in denen D_3 vorkommt, verschwinden.

Nun haben aber die vier kubischen Gleichungen $(\alpha.)$ zusammen 81 Lösungen $(x_0, x_1, \dots x_4)$. Die Gleichungen $(\beta.)$ haben $4.3 = 12$ Lösungen,

und ebenso die Gleichungen (γ.), (δ.) und (ε.); doch ist die Gesammtzahl der Lösungen von (β.), (γ.), (δ.) und (ε.) nicht 48, sondern nur 46, weil (β.) und (γ.) die Lösung der vier linearen Gleichungen:

$$A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = 0$$

mit einander gemein haben, (δ.) und (ε.) aber diejenige der Gleichungen:

$$A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = 0.$$

Die Gleichungen (φ.) haben 15 Lösungen; denn die dreifache Gleichung:

$$\left\| \begin{matrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & C_1 & \end{matrix} \right\| = 0,$$

welche bedeutet, dass alle fünf zweireihigen Determinanten dieser Matrix verschwinden, folgt aus den Gleichungen:

$$\left\| \begin{matrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \end{matrix} \right\| = \left| \begin{matrix} A_0 & A_1 \\ C_0 & C_1 \end{matrix} \right| = 0,$$

falls nicht $A_0 = A_1 = A_2 = 0$ ist, und ist deshalb vom fünften Grade.

Die ersten Minoren der Determinante $\varDelta$ verschwinden demnach i. A. für $81-46-15 = 20$ Werthensysteme der Parameter $\varkappa_0, \varkappa_1, \dots \varkappa_4$; jedem dieser Werthensysteme aber entspricht ein zweifach singulärer Raum von $|\Sigma_4|$.

115. Den Nachweis, dass eine $|\Sigma_9|$ i. A. zwanzig dreifach singuläre Räume enthält, wollen wir auf andere Art führen. Wenn von einer $|\Sigma_n|$ ein Raum auf die Ebene $\alpha = 0$ oder $a_0+a_1x+a_2y+a_3z = 0$ sich reducirt, so fallen seine vier Ebenen (3.) mit dieser Ebene zusammen, und die Gleichungen:

$$\varrho \sum_0^n \varkappa_i \alpha_i = \varrho_1 \Sigma \varkappa_i \beta_i = \varrho_2 \Sigma \varkappa_i \gamma_i = \varrho_3 \Sigma \varkappa_i \delta_i = \alpha$$

werden in Bezug auf x, y, z identisch. Daraus folgt:

$$\begin{array}{llllll} \varrho \Sigma \varkappa_i a_{0i} = & \varrho_1 \Sigma \varkappa_i b_{0i} = & \varrho_2 \Sigma \varkappa_i c_{0i} = & \varrho_3 \Sigma \varkappa_i d_{0i} & = a_0, \\ \varrho \Sigma \varkappa_i a_{1i} = & \varrho_1 \Sigma \varkappa_i b_{1i} = & \cdot & \cdot & = a_1, \\ \varrho \Sigma \varkappa_i a_{2i} = & \cdot & \cdot & \cdot & = a_2, \\ \varrho \Sigma \varkappa_i a_{3i} = & \cdot & \cdot & = \varrho_3 \Sigma \varkappa_i d_{3i} & = a_3. \end{array}$$

Eliminiren wir, wenn $n < 12$ ist, aus diesen 16 Gleichungen die $n+1$ Parameter $\varkappa_0, \varkappa_1, \dots \varkappa_n$ nebst $\frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{\varrho_1}$, $\frac{1}{\varrho_2}$ und $\frac{1}{\varrho_3}$, so ergeben sich für die

Coordinaten α_0, α_1, α_2, α_3 der Ebene $\alpha = 0$ die Gleichungen:

$$(10.)\quad \left\| \begin{array}{cccccccccccccccc} a_{00} & a_{10} & a_{20} & a_{30} & b_{00} & \cdot & \cdot & b_{30} & c_{00} & \cdot & \cdot & c_{30} & d_{00} & \cdot & \cdot & d_{30} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & a_{31} & b_{01} & \cdot & \cdot & b_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{0n} & a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & b_{0n} & \cdot & \cdot & b_{3n} & c_{0n} & \cdot & \cdot & c_{3n} & d_{0n} & \cdot & \cdot & d_{3n} \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \right\| = 0,$$

d. h. alle $(n+5)$-reihigen Determinanten in dieser Matrix sind Null.

Die Formel (10.) hat auch, wenn $n \geqq 12$ ist, für $|\Sigma_n|$ Bedeutung; sie drückt in diesen Fällen aus, dass alle 16-reihigen Determinanten der Matrix verschwinden. Sie ändert sich nicht wesentlich, wenn die Spalten der Matrix mit beliebigen Factoren multiplicirt und sodann zu den Elementen einer Spalte die entsprechenden Elemente anderer Spalten addirt werden. Bei geeigneter Wahl der Factoren können auf diese Weise mit Hülfe von $n+1$ Spalten in jeder der $15-n$ übrigen die $n+1$ ersten Elemente zu Null gemacht werden. Die Formel (10.) geht dadurch über in:

$$(11.)\quad \left\| \begin{array}{cccc} A_0 & A_1 & \dots & A_{14-n} \\ B_0 & B_1 & \dots & B_{14-n} \\ C_0 & C_1 & \dots & C_{14-n} \\ D_0 & D_1 & \dots & D_{14-n} \end{array} \right\| = 0,$$

worin A_i, B_i, C_i, D_i Linearformen der Ebenencoordinaten α_0, α_1, α_2, α_3 bezeichnen.

116. Für $n = 11$ enthält die Matrix (11.) nur eine vierreihige Determinante von derselben Form wie (7.). Eine $|\Sigma_{11}|$ enthält demnach ∞^2 dreifach singuläre Räume; dieselben reduciren sich auf die Berührungsebenen einer Fläche vierter Klasse, welche der Kernfläche vierter Ordnung eines Raumgebüsches $|\Sigma_3|$ reciprok ist.

Ist $n = 10$, so enthält die Matrix (11.) fünf Spalten und fünf vierzeilige Determinanten, und hat dieselbe Form wie (8.). Wie die Doppelgleichung (8.) eine Raumcurve zehnter Ordnung darstellt, so repräsentirt (11.) und ebenso (10.) einen Ebenenbüschel zehnter Ordnung für $n = 10$. Die dreifach singulären Räume einer $|\Sigma_{10}|$ reduciren sich demnach i. A. auf

die Ebenen eines Büschels zehnter Ordnung, welcher der Hauptcurve zehnter Ordnung einer $|\Sigma_4|$ reciprok ist.

Für $n=9$ wird (11.) eine dreifache Gleichung von der Form (9.) und hat wie (9.) zwanzig Lösungen, denen 20 Ebenen (a_0, a_1, a_2, a_3) entsprechen. Eine $|\Sigma_9|$ enthält demnach, wie vorhin (115.) behauptet wurde, i. A. zwanzig dreifach singuläre Räume; die 20 Ebenen, auf welche diese Räume sich reduciren, sind den 20 Hauptpunkten einer $|\Sigma_5|$ reciprok.

117. Eine $|\Sigma_{12}|$ enthält ∞^3 dreifach singuläre Räume; jede $|\Sigma_{11}|$ von $|\Sigma_{12}|$ enthält deren ∞^2, und zwar ist der Ort der Ebenen, auf welche je einer dieser Räume sich reducirt, eine Fläche Φ^4 vierter Klasse (116.). Für $n=12$ repräsentirt die Doppelgleichung (10.) verschiedene solche Flächen Φ^4, wenn in der Matrix je eine der ersten 13 Reihen fortgelassen wird; überhaupt aber repräsentirt sie einen diese Flächen umhüllenden Ebenenbüschel γ^6 sechster Ordnung, welcher zu der Kerncurve c^6 eines Raumbündels $|\Sigma_2|$ reciprok ist. Sie kann nämlich auf die zu (6.) analoge Form (11.):

$$\begin{Vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{Vmatrix} = 0$$

gebracht werden. Auf jede Ebene von γ^6 reduciren sich ∞^1 Räume von $|\Sigma_{12}|$.

Für $n=13$ werden (10.) und (11.) dreifache Gleichungen, und zwar hat (11.) dieselbe Form wie (5.), nämlich:

$$\begin{Vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{Vmatrix} = 0,$$

und repräsentirt i. A. vier Ebenen (a_0, a_1, a_2, a_3). Auf jede dieser vier Ebenen reduciren sich ∞^2 Räume von $|\Sigma_{13}|$.

118. Ein Raum von $|\Sigma_n|$ ist zweifach singulär, d. h. seine Ebenen gehen alle durch eine Gerade g, wenn seine Gleichung:

$$\sum_0^n \varkappa_i(\alpha_i+\lambda\beta_i+\mu\gamma_i+\nu\delta_i) = 0$$

für alle Werthe von λ, μ, ν durch die Coordinaten x', y', z' und x'', y'', z'' zweier Punkte von g befriedigt wird. Wir erhalten demnach acht Gleichungen:

$$\sum_0^n \varkappa_i\alpha_i' = \Sigma\varkappa_i\beta_i' = \Sigma\varkappa_i\gamma_i' = \Sigma\varkappa_i\delta_i' = 0$$

und

$$\Sigma \varkappa_i \alpha_i'' = \Sigma \varkappa_i \beta_i'' = \Sigma \varkappa_i \gamma_i'' = \Sigma \varkappa_i \delta_i'' = 0,$$

worin

$$\alpha_i' = a_{0i} + a_{1i} x' + a_{2i} y' + a_{3i} z', \quad \alpha_i'' = a_{0i} + a_{1i} x'' + a_{2i} y'' + a_{3i} z'', \text{ u. s. w.}$$

Für $n \leqq 7$ ergiebt sich hieraus durch Eliminirung von $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$:

$$(12.) \qquad \left\| \begin{matrix} \alpha_0' & \alpha_0'' & \beta_0' & \beta_0'' & \gamma_0' & \gamma_0'' & \delta_0' & \delta_0'' \\ \alpha_1' & \alpha_1'' & \beta_1' & \beta_1'' & \gamma_1' & \gamma_1'' & \delta_1' & \delta_1'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n' & \alpha_n'' & \beta_n' & \beta_n'' & \gamma_n' & \gamma_n'' & \delta_n' & \delta_n'' \end{matrix} \right\| = 0.$$

Für $n = 7$ repräsentirt diese Gleichung einen Strahlencomplex vierten Grades, denn sie ist bezüglich der sechs Liniencoordinaten:

$$x' - x'', \quad y' - y'', \quad z' - z'', \quad y'z'' - z'y'', \quad z'x'' - x'z'', \quad x'y'' - y'x''$$

vom vierten Grade und homogen, weil $\alpha_i'\alpha_k'' - \alpha_k'\alpha_i''$, $\beta_l'\beta_m'' - \beta_m'\beta_l''$, ... Linearformen derselben sind. Dieselbe Gleichung stellt einen biquadratischen Complexkegel mit dem Mittelpunkte (x', y', z') dar, wenn x'', y'', z'' als laufende Punktcoordinaten betrachtet werden. Die Axen der ∞^3 zweifach singulären Räume einer $|\Sigma_7|$ bilden demnach einen biquadratischen Strahlencomplex.

Für $n = 6$ stellt die Formel (12.) die Congruenz dar, welche von den Axen der zweifach singulären Räume einer $|\Sigma_6|$ gebildet wird. Für $n = 5$ repräsentirt sie die Schaar der Axen einer $|\Sigma_5|$ (vgl. 106.).

119. Werden in (12.) die Elemente der 1., 3., 5., 7. Spalte von den entsprechenden Elementen der nächstfolgenden Spalte subtrahirt, so erhält man eine Umformung der Formel (12.), in welcher x'', y'', z'' nur in den Verbindungen $x'' - x'$, $y'' - y'$, $z'' - z'$ auftreten. Mit Hülfe von vier Reihen können sodann die $n - 3$ übrigen Reihen, analog wie oben in (10.) die $15 - n$ Spalten, so umgeformt werden, dass ihre ungeraden Elemente alle Null werden. Die Formel (12.) geht dadurch über in:

$$(13.) \qquad \left\| \begin{matrix} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n-4} & B_{n-4} & C_{n-4} & D_{n-4} \end{matrix} \right\| = 0,$$

worin A_i, B_i, C_i, D_i Linearformen von $x'' - x'$, $y'' - y'$, $z'' - z'$ bedeuten.

Für $n = 6$ ist (13.) eine Doppelgleichung, welche sechs Strahlen des Punktes (x', y', z') darstellt. In letzteren schneiden sich die beiden

kubischen Kegel:

$$\begin{vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} A_0 & B_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \end{vmatrix} = 0,$$

welche noch drei durch die Doppelgleichung $\begin{Vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \end{Vmatrix} = 0$ repräsentirte Strahlen gemein haben. Die Axen der ∞^2 zweifach singulären Räume einer $|\Sigma_6|$ bilden demnach eine Congruenz sechster Ordnung.

120. Die Formel (12.) oder (13.) bedeutet, wenn $n > 7$ ist, dass alle in der Matrix enthaltenen acht- resp. vierreihigen Determinanten verschwinden. Diesen Bedingungen aber genügen die Coordinaten aller Geraden, welche von je einem zweifach singulären Raume der in $|\Sigma_n|$ enthaltenen Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_7|$ die Axen sind. Für $n = 8$ repräsentiren beide Formeln die Congruenz der ∞^2 Strahlen, welche von je einem Büschel zweifach singulärer Räume einer $|\Sigma_8|$ die Axen sind. Diese Congruenz ist von der zehnten Ordnung; denn (13.) ergiebt sich für $n = 8$ aus:

$$\begin{vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0,$$

falls nicht

$$\begin{Vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{Vmatrix} = 0$$

ist, und durch den beliebigen Punkt (x', y', z') gehen demnach $16-6 = 10$ Strahlen der Congruenz.

121. Die soeben mittelst Punktcoordinaten dargestellten Strahlengebilde einer $|\Sigma_n|$ lassen sich auch mittelst Ebenencoordinaten darstellen. Ein Raum von $|\Sigma_n|$ nämlich ist zweifach singulär, wenn seine Gleichung:

$$\sum_0^n \varkappa_i(\alpha_i + \lambda\beta_i + \mu\gamma_i + \nu\delta_i) = 0$$

für alle Werthe von λ, μ, ν die Form $\varrho\alpha + \tau\beta = 0$ annimmt. Setzen wir demgemäss:

$$\sum_0^n \varkappa_i\alpha_i = \varrho_0\alpha + \tau_0\beta, \quad \Sigma\varkappa_i\beta_i = \varrho_1\alpha + \tau_1\beta, \quad \Sigma\varkappa_i\gamma_i = \varrho_2\alpha + \tau_2\beta, \quad \Sigma\varkappa_i\delta_i = \varrho_3\alpha + \tau_3\beta,$$

so folgen aus diesen für x, y, z identischen Gleichungen wegen (1.) die sechzehn Gleichungen:

$$\begin{array}{llll}
\sum\limits_0^n \varkappa_i a_{0i} = \varrho_0 a_0 + \tau_0 b_0, & \Sigma \varkappa_i b_{0i} = \varrho_1 a_0 + \tau_1 b_0, & \Sigma \varkappa_i c_{0i} = \varrho_2 a_0 + \tau_2 b_0, & \Sigma \varkappa_i d_{0i} = \varrho_3 a_0 + \tau_3 b_0, \\
\Sigma \varkappa_i a_{1i} = \varrho_0 a_1 + \tau_0 b_1, & \Sigma \varkappa_i b_{1i} = \varrho_1 a_1 + \tau_1 b_1, & \cdot & \cdot \\
\Sigma \varkappa_i a_{2i} = \varrho_0 a_2 + \tau_0 b_2, & \cdot & \cdot & \cdot \\
\Sigma \varkappa_i a_{3i} = \varrho_0 a_3 + \tau_0 b_3, & \cdot & \cdot & \cdot \quad ,
\end{array}$$

woraus für $n \leqq 7$ durch Eliminirung der $n+1$ Parameter $\varkappa_i$, der vier ϱ_i und der vier τ_i die Formel sich ergiebt:

$$(14.)\quad \left\| \begin{array}{cccccccccccccccc}
a_{00} & a_{10} & a_{20} & a_{30} & b_{00} & b_{10} & b_{20} & b_{30} & c_{00} & c_{10} & c_{20} & c_{30} & d_{00} & d_{10} & d_{20} & d_{30} \\
a_{01} & a_{11} & a_{21} & a_{31} & b_{01} & \cdot & \cdot & b_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{0n} & a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & b_{0n} & \cdot & \cdot & b_{3n} & c_{0n} & \cdot & \cdot & c_{3n} & d_{0n} & \cdot & \cdot & d_{3n} \\
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & \cdot & \cdot & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3
\end{array} \right\| = 0.$$

Alle $(n+9)$-reihigen Determinanten dieser Matrix verschwinden für die Axen der zweifach singulären Räume von $|\Sigma_n|$, wenn $n \leqq 7$ ist.

122. Für $n = 7$ enthält diese Matrix eine einzige 16-reihige Determinante; diese aber ist eine biquadratische Form der sechs Liniencoordinaten $a_i b_k - a_k b_i$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$. Die Gleichung (14.) stellt ebenso wie (12.) für $n = 7$ den biquadratischen Complex dar, welchen die Axen der zweifach singulären Räume einer $|\Sigma_7|$ bilden.

Ist $n = 6$, so wird sie eine Doppelgleichung und repräsentirt die Congruenz der Axen aller zweifach singulären Räume einer $|\Sigma_6|$. Diese Congruenz ist von der zehnten Klasse, d. h. in einer beliebigen Ebene (b_0, b_1, b_2, b_3) liegen i. A. zehn ihrer Strahlen. Denn die Doppelgleichung (14.) hat für $n = 6$ hinsichtlich der laufenden Ebenencoordinaten a_0, a_1, a_2, a_3 dieselbe Form, wie die Gleichung (10.) für $n = 10$, stellt also gleich dieser

einen Ebenenbüschel zehnter Ordnung dar; dieser Büschel aber zerfällt in zehn Büschel erster Ordnung, deren Axen in (b_0, b_1, b_2, b_3) liegen. Die Axen der zweifach singulären Räume einer $|\Sigma_6|$ bilden somit eine Congruenz zehnter Klasse sechster Ordnung (vgl. 119.).

123. Die Formel (14.) bedeutet, wenn $n > 7$ ist, dass alle in der Matrix enthaltenen 16-reihigen Determinanten verschwinden; sie stellt auch in diesem Falle dieselben Strahlengebilde dar, wie (12.). Für $n = 8$ repräsentirt sie eine Congruenz sechster Klasse zehnter Ordnung, deren Strahlen von je ∞^1 zweifach singulären Räumen einer $|\Sigma_8|$ die Axen sind. Dieselbe ist der Congruenz sechster Ordnung zehnter Klasse, welche für $n = 6$ durch die Formel (12.) dargestellt wird, reciprok. Denn auf dieselbe Weise, wie (10.) in (11.), kann (14.) umgeformt werden in:

$$(15.)\qquad \left\|\begin{matrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{14-n} \\ A'_0 & A'_1 & \dots & A'_{14-n} \\ B_0 & B_1 & \dots & B_{14-n} \\ B'_0 & B'_1 & \dots & B'_{14-n} \\ C_0 & C_1 & \dots & C_{14-n} \\ C'_0 & C'_1 & \dots & C'_{14-n} \\ D_0 & D_1 & \dots & D_{14-n} \\ D'_0 & D'_1 & \dots & D'_{14-n} \end{matrix}\right\| = 0,$$

worin A_i, B_i, C_i, D_i Linearformen der Ebenencoordinaten a_0, a_1, a_2, a_3, und A'_i, B'_i, C'_i, D'_i solche von b_0, b_1, b_2, b_3 bezeichnen; für $n = 8$ aber ist diese Formel (15.) ganz so gebaut, wie (12.) für $n = 6$.

Ueberhaupt stellen die beiden Formeln (15.) und (12.) für resp. $n = 14-i$ und $n = i$ zwei *reciproke*, zu $|\Sigma_{14-i}|$ bezw. $|\Sigma_i|$ gehörige Strahlengebilde dar. Für $n = 7$ insbesondere folgt hieraus, dass der biquadratische Complex der Axen einer $|\Sigma_7|$ reciprok ist zu einem gleichartigen Complexe.

§ 19.

Die lineare Mannigfaltigkeit $|\Sigma_6|$ von ∞^6 collinearen Räumen und das $|\varepsilon_6|$-Gebüsch $|\varepsilon_{6,3}|$.

124. Eine $|\Sigma_6|$ besteht aus ∞^6 collinearen Räumen und ist durch beliebige sieben derselben bestimmt. Sie enthält ∞^6 $|\Sigma_5|$, ∞^{10} $|\Sigma_4|$, ∞^{12} $|\Sigma_3|$, ∞^{12} $|\Sigma_2|$ und ∞^{10} $|\Sigma_1|$, also auch ∞^6 Hauptpunktgruppen 20 H, ∞^{10} Hauptcurven c^{10}, ∞^{12} Kernflächen K^4, ∞^{12} Kerncurven c^6 und ∞^{10} Haupttetraeder.



Auf $|\Sigma_6|$ ruht ein Gebüsch $|\varepsilon_{6,3}|$ von ∞^3 collinearen Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_6|$, die aus je ∞^6 homologen Ebenen der Räume von $|\Sigma_6|$ bestehen. Im Allgemeinen hängen $|\Sigma_6|$ und $|\varepsilon_{6,3}|$ von 48 Parametern ab.

125. Zwei bezw. drei Hauptpunktgruppen 20 H von $|\Sigma_6|$ können allemal durch eine Hauptcurve c^{10} bezw. durch eine Kernfläche K^4 verbunden werden, weil zwei resp. drei $|\Sigma_5|$ von $|\Sigma_6|$ allemal eine $|\Sigma_4|$ resp. eine $|\Sigma_3|$ gemein haben. Haben die Gruppen einen Punkt gemein, so wird dieser ein dreifacher Punkt von c^{10} resp. K^4 (102*a*.). Jede Hauptcurve c^{10} enthält ∞^1 Gruppen 20 H und kann mit den übrigen Gruppen durch ∞^4 Kernflächen vierter Ordnung verbunden werden. Jede Kernfläche K^4 enthält ∞^2 Hauptcurven c^{10} und ∞^2 Hauptpunktgruppen 20 H.

Zwei Hauptcurven c^{10} haben eine Gruppe 20 H gemein, wenn sie auf einer Kernfläche K^4 liegen, und umgekehrt; denn zwei $|\Sigma_4|$ von $|\Sigma_6|$ liegen in einer $|\Sigma_5|$, wenn sie ein Raumgebüsch $|\Sigma_3|$ gemein haben, und umgekehrt. Durch jede Kerncurve c^6 gehen ∞^3 Kernflächen K^4, die sich büschelweise in ∞^4 Hauptcurven c^{10} und bündelweise in ∞^3 Hauptpunktgruppen 20 H schneiden; mit diesen c^{10} hat die Kerncurve je 20 Punkte gemein (91.).

126. Werden die ∞^1 Gruppen 20 H, die auf einer c^{10} liegen, mit einer anderen Hauptcurve c_1^{10} durch Kernflächen verbunden, so schneiden sich diese i. A. noch in einer Kerncurve c^6, welche mit c^{10} und c_1^{10} je 20 Punkte gemein hat; denn zwei $|\Sigma_4|$ von $|\Sigma_6|$ durchdringen sich i. A in einer $|\Sigma_2|$, die Kerncurve c^6 dieser $|\Sigma_2|$ aber liegt auf den ∞^1 Kernflächen der $|\Sigma_3|$, welche die eine $|\Sigma_4|$ mit den ∞^1 durch die andere gehenden $|\Sigma_5|$ gemein hat. Die ∞^2 auf einer Kernfläche K^4 liegenden Hauptcurven c^{10} und Hauptpunktgruppen 20 H können mit jeder anderen Gruppe 20 H durch ∞^2 Kernflächen und ∞^2 Hauptcurven verbunden werden; diese Kernflächen bilden einen Bündel und schneiden K^4 in einer und derselben Kerncurve c^6, welche mit den ∞^2 Hauptcurven je 20 Punkte gemein hat. Der Beweis dieses Satzes ist dem soeben geführten analog und beruht darauf, dass in $|\Sigma_6|$ eine $|\Sigma_5|$ mit einer $|\Sigma_3|$ einen Raumbündel $|\Sigma_2|$ gemein hat.

127. In $|\Sigma_6|$ giebt es ∞^5 singuläre Räume (vgl. 105.); jeder Punkt ist Doppelpunkt von ∞^2 derselben, welche einen Raumbündel bilden. Da zwei dieser Raumbündel durch eine $|\Sigma_5|$ verbunden werden können, so sind zwei beliebige Punkte allemal in einer Hauptpunktgruppe 20 H von $|\Sigma_6|$ enthalten.

Es giebt ∞^2 zweifach singuläre, in Ebenenbüschel ausgeartete Räume in $|\Sigma_6|$; die Axen derselben bilden eine Congruenz $|a_2|$ sechster Ordnung zehnter Klasse (105., 122.). Zwei beliebige Punkte einer solchen Axe sind in ∞^1 Hauptpunktgruppen 20 H enthalten, weil die zugehörigen Raumbündel einen zweifach singulären Raum gemein haben und folglich durch ∞^1 $|\Sigma_5|$ und eine $|\Sigma_4|$ von $|\Sigma_6|$ verbunden werden können. Die Hauptcurve c^{10} dieser $|\Sigma_4|$ hat die beiden Punkte zu dreifachen Punkten (102*a*.) und verbindet jene ∞^1 Gruppen 20 H.

128. 'Die ∞^3 Räume von $|\Sigma_6|$, welche in eine beliebige $|\varepsilon_6|$ des Gebüsches $|\varepsilon_{6,3}|$ irgend eine Ebene φ entsenden, bilden ein specielles Gebüsch, dessen Kernfläche in φ und eine kubische Fläche K^3 zerfällt (34*c*.). Wenn φ um eine Gerade s sich dreht, so beschreibt das Gebüsch eine specielle $|\Sigma_4|$, deren Hauptcurve in s und eine Raumcurve c^9 neunter Ordnung zerfällt; die durch c^9 gehende Fläche K^3 aber ändert sich nicht bei der Drehung von φ (102.). Mit jeder beliebigen Ebene bildet demnach K^3 eine Kernfläche von $|\Sigma_6|$. Die Punkte der kubischen Fläche K^3 sind Doppelpunkte von ∞^2 singulären Räumen, die in $|\Sigma_6|$ einen Raumbündel bilden (102.).

Jeder Mannigfaltigkeit $|\varepsilon_6|$ von $|\varepsilon_{6,3}|$ entspricht auf diese Weise ein Bündel singulärer Räume von $|\Sigma_6|$ und zugleich eine kubische Fläche K^3 als Ort der Doppelpunkte dieser Räume. Je vier Räume von $|\Sigma_6|$, denen in $|\varepsilon_6|$ eine und dieselbe Ebene φ entspricht, erzeugen i. A. eine in K^3 und φ zerfallende Kernfläche.

129. Die ∞^4 Büschel $|\varepsilon_{6,1}|$ von $|\varepsilon_{6,3}|$ ruhen auf je einer $|u_6|$, welche aus homologen Ebenenbüscheln der ∞^6 Räume von $|\Sigma_6|$ besteht. Die Hauptgerade t von $|u_6|$ ist Axe von ∞^3 dieser Büschel (49.) und somit entsprechend gemeinsame Gerade von ∞^3 Räumen der $|\Sigma_6|$. Von der Kernfläche des Gebüsches dieser ∞^3 Räume ist t eine Doppelpunktsgerade (34*d*.). Jedem Büschel $|\varepsilon_{6,1}|$ von $|\varepsilon_{6,3}|$ entspricht auf diese Weise eine Gerade t; unter den Kernflächen von $|\Sigma_6|$ aber giebt es ∞^4 mit je einer Doppelpunktsgeraden t.

Jede Gerade ist (105.) Doppelpunktsgerade einer Kernfläche von $|\Sigma_6|$, weil je zwei ihrer Punkte allemal in einer Gruppe 20 H enthalten sind (127.); diese Kernfläche ist der Ort der übrigen 18 Punkte der Gruppe. Jede „Axe von $|\Sigma_6|$", d. h. jeder Strahl der Congruenz $|a_2|$ sechster Ordnung zehnter Klasse ist Doppelpunktsgerade von ∞^1 Kernflächen (vgl. 127.).

§ 20.

Die linearen Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_n|$ von ∞^n collinearen Räumen für $n > 6$.

130. Eine $|\Sigma_n|$ besteht aus ∞^n collinearen Räumen, ist durch beliebige $n+1$ derselben bestimmt und enthält $\infty^{(k+1)(n-k)}$ lineare Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_k|$, wenn $n > k > 0$ ist (36.). Sie trägt ein Gebüsch $|\varepsilon_{n,3}|$ von ∞^3 collinearen Mannigfaltigkeiten $|\varepsilon_n|$, die aus je ∞^n homologen Ebenen der Räume von $|\Sigma_n|$ bestehen. Die allgemeinen Mannigfaltigkeiten $|\Sigma_n|$ und $|\Sigma_{14-n}|$ hängen von gleichviel, nämlich von $n(14-n)$ Parametern ab (vgl. 30.), wenn $14 > n > 0$ ist.

Eine $|\Sigma_n|$ enthält ∞^{n-1} singuläre Räume, die eine biquadratische Mannigfaltigkeit bilden; denn die Raumbüschel $|\Sigma_1|$ von $|\Sigma_n|$ enthalten i. A. je vier singuläre Räume. Ein beliebiger Punkt ist für $n > 4$ Doppelpunkt von ∞^{n-4} singulären Räumen der $|\Sigma_n|$, und zwar bilden diese Räume eine singuläre $|\Sigma_{n-4}|$ (vgl. 127.). Eine $|\Sigma_n|$ enthält ∞^{n-4} zweifach singuläre Räume, wenn $n > 4$ ist; denn ihre $|\Sigma_4|$ enthalten i. A. je zwanzig derselben (95., 114.). Ist $n > 9$, so enthält $|\Sigma_n|$ ∞^{n-9} dreifach singuläre, auf je eine Ebene reducirte Räume, denn ihre $|\Sigma_9|$ enthalten i. A. je zwanzig derselben (116.).

131. Eine $|\Sigma_7|$ insbesondere enthält ∞^6 singuläre Räume in ∞^3 singulären Gebüschen, deren Kernflächen biquadratische Kegel sind. Die Strahlen dieser „Kernkegel" sind (102*e.*) die Axen zweifach singulärer Räume von $|\Sigma_7|$. Es giebt demnach ∞^3 zweifach singuläre Räume in $|\Sigma_7|$, und zwar bilden deren Axen einen biquadratischen Strahlencomplex (vgl. 118., 122.). Die Kegel dieses Complexes sind die Kernkegel der ∞^3 singulären Raumgebüsche von $|\Sigma_7|$.

Weil zwei $|\Sigma_5|$ von $|\Sigma_7|$ allemal eine $|\Sigma_3|$ gemein haben, so können je zwei der ∞^{12} Hauptpunktgruppen 20 H von $|\Sigma_7|$ durch eine Kernfläche verbunden werden. Jede der ∞^{16} Kernflächen K^4 enthält ∞^3 Hauptcurven c^{10} und ∞^4 Hauptpunktgruppen 20 H; denn in $|\Sigma_7|$ gehen ∞^3 $|\Sigma_4|$ und ∞^4 $|\Sigma_5|$ durch jede $|\Sigma_3|$. Auf jeder der ∞^{15} Hauptcurven c^{10} liegen ∞^2 Punktgruppen 20 H, und durch jede Gruppe 20 H gehen ∞^5 Hauptcurven und ∞^8 Kernflächen, wie ähnlich sich ergiebt.

Jeder $|\varepsilon_7|$ von $|\varepsilon_{7,3}|$ entspricht (102*c.*) in $|\Sigma_7|$ ein Gebüsch $|\Sigma_3|_0$ singulärer Räume nebst einer Hauptcurve c_2^6 sechster Ordnung; und zwar ist $|\Sigma_3|_0$ in jeder Mannigfaltigkeit $|\Sigma_4|$ von $|\Sigma_7|$ enthalten, deren Räume eine und dieselbe Ebene nach $|\varepsilon_7|$ entsenden, durch c_2^6 aber gehen die kubischen Theile der Kernflächen dieser $|\Sigma_4|$.

132. Eine $|\Sigma_8|$ enthält ∞^4 zweifach singuläre Räume; eine beliebige Gerade ist i. A. von einem derselben die Axe. Die biquadratischen Complexe der Axen zweier $|\Sigma_7|$ von $|\Sigma_8|$ haben eine Congruenz $|a_2|$ sechster Ordnung zehnter Klasse und folglich noch eine andere $|a_2'|$ zehnter Ordnung sechster Klasse gemein; und zwar besteht $|a_2|$ aus den Axen der zweifach singulären Räume einer $|\Sigma_6|$, in welcher die beiden $|\Sigma_7|$ sich durchdringen. Die Congruenz $|a_2'|$ ist zu derjenigen der Axen einer $|\Sigma_6|$ reciprok (123.); ihre Strahlen sind von je einem Büschel zweifach singulärer Räume der $|\Sigma_8|$ die Axen (vgl. 77., 120.) und folglich in dem biquadratischen Axencomplexe einer jeden $|\Sigma_7|$ von $|\Sigma_8|$ enthalten.

133. Eine $|\Sigma_9|$ enthält i. A. zwanzig auf je eine Ebene reducirte Räume; die Gruppe dieser 20 Ebenen ist der Hauptpunktgruppe 20 H einer $|\Sigma_5|$ reciprok (116.). Jede der 20 Ebenen ist die Collineationsebene von ∞^8 Büscheln perspectiver Räume der $|\Sigma_9|$. Es giebt i. A. ∞^1 Gerade a, welche von je einem Bündel zweifach singulärer Räume der $|\Sigma_9|$ die Axen sind; ihr Ort ist demjenigen der Axen einer $|\Sigma_5|$ reciprok (123.), also eine Fläche zwanzigsten Grades, mit welcher die vorhin erwähnten 20 Ebenen je sechs Gerade a gemein haben (vgl. 106.). Die biquadratischen Axencomplexe der ∞^{16} $|\Sigma_7|$ und die Congruenzen $|a_2'|$ der ∞^9 $|\Sigma_8|$ von $|\Sigma_9|$ gehen alle durch jene ∞^1 Geraden a.

134. Eine $|\Sigma_{10}|$ enthält i. A. ∞^1 dreifach singuläre, auf je eine Ebene reducirte Räume, und zwar ist der Ort dieser Ebenen ein Büschel γ^{10} zehnter Ordnung, welcher der Hauptcurve c^{10} einer $|\Sigma_4|$ reciprok ist (116.). Den 20 Axen von $|\Sigma_4|$ oder Quadrisecanten von c^{10} (vgl. 95.) entsprechen 20 Gerade g, durch welche je vier Ebenen von γ^{10} gehen. Jede dieser 20 Geraden ist die Axe von ∞^3 zweifach singulären Räumen der $|\Sigma_{10}|$; letztere bilden ein Gebüsch, dessen Kernfläche in die vier Ebenen von γ^{10} zerfällt. Die ∞^{10} $|\Sigma_9|$ von $|\Sigma_{10}|$ enthalten von γ^{10} i. A. je 20 Ebenen (133.). Die biquadratischen Axencomplexe der ∞^{24} $|\Sigma_7|$ von $|\Sigma_{10}|$ haben die 20 g zu gemeinsamen Strahlen.

135. Eine $|\Sigma_{11}|$ enthält ∞^2 dreifach singuläre Räume; dieselben reduciren sich auf die Berührungsebenen einer Fläche Φ^4 vierter Klasse, welche zu der Kernfläche einer $|\Sigma_3|$ reciprok ist (116.). Jede Gerade g ist die Axe von ∞^3 zweifach singulären Räumen der $|\Sigma_{11}|$; die Kernfläche des Gebüsches dieser Räume zerfällt in die vier durch g gehenden Berührungsebenen von Φ^4.

Von einer $|\Sigma_{12}|$ reduciren sich auf jede Ebene eines gewissen Büschels γ^6 sechster Ordnung ∞^1 dreifach singuläre Räume (117.), auf jede andere Ebene dagegen reducirt sich ein solcher Raum. Der Büschel γ^6 ist zu der Kerncurve c^6 eines Raumbündels reciprok; er umhüllt die ∞^{12} Flächen vierter Klasse, welche zu je einer $|\Sigma_{11}|$ von $|\Sigma_{12}|$ gehören. Je zwei dieser Flächen haben ausser γ^6 noch die Ebenen eines Büschels γ^{10} zehnter Ordnung gemein, welcher zu einer $|\Sigma_{10}|$ von $|\Sigma_{12}|$ gehört (134.).

Von einer $|\Sigma_{13}|$ reduciren sich auf eine beliebige Ebene ∞^1, und i. A. auf gewisse vier Ebenen je ∞^2 dreifach singuläre Räume (117.). Diese vier Ebenen berühren die ∞^{24} Flächen vierter Klasse, welche zu je einer $|\Sigma_{11}|$ von $|\Sigma_{13}|$ gehören. — Von einer $|\Sigma_{14}|$ reduciren sich auf jede Ebene ∞^2 dreifach singuläre Räume.

Zur Theorie der indefiniten ternären quadratischen Formen.

(Von Herrn *A. Meyer* in Zürich.)

Abgesehen von dem, was *Gauss* in seinen „*Disquisitiones arithmeticae*" über ternäre quadratische Formen mitgetheilt hat, scheinen die ersten Sätze über die Klassenanzahl indefiniter ternärer Formen von *Eisenstein* herzurühren. Derselbe hat seiner „*Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen*" als Anhang eine „*Tabelle der nicht äquivalenten unbestimmten ternären quadratischen Formen für die Determinanten ohne quadratischen Theiler unter* 20" beigefügt*) und dabei die Bemerkung gemacht, dass für diese Determinanten jedes Geschlecht nur *eine* Formenklasse enthält. Bei Beschränkung auf ungerade Determinanten ohne quadratischen Theiler ergab sich ihm der Beweis dieses Satzes für dasjenige Geschlecht, durch dessen Formen die Null rational darstellbar ist, aus dem bekannten Kriterium für die Lösbarkeit der unbestimmten Gleichung

$$ax^2+by^2+cz^2 = 0.$$

Bald nach Vollendung seiner Arbeit wurde *Eisenstein* der Wissenschaft entrissen, und seine Vermuthung, dass es sich mit den übrigen Geschlechtern ebenso verhalten möchte, scheint lange unbeachtet geblieben zu sein. In meiner Inauguraldissertation habe ich die Richtigkeit derselben für alle indefiniten ternären Formen nachgewiesen, deren von *Eisenstein* mit Ω und Δ bezeichnete Invarianten ungerade und relativ prim sind. In vorliegender Abhandlung soll die Untersuchung auch auf gerade Invarianten ausgedehnt und zugleich der frühere Beweis in einigen Punkten verbessert werden.

1. Es sei

$$f = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix} = ax^2+a'x'^2+a''x''^2+2bx'x''+2b'x''x+2b''xx'$$

---

*) Dieses Journal Bd. 41.

eine indefinite ternäre Form, deren Determinante

$$D = ab^2+a'b'^2+a''b''^2-aa'a''-2bb'b''$$

von Null verschieden und positiv vorausgesetzt wird, was erlaubt ist, da die Formen negativer Determinante durch Aenderung der Vorzeichen aller Coefficienten auf diejenigen positiver Determinante zurückgeführt werden können. Die Coefficienten a, a', a'', b, b', b'' werden als ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler angenommen, und die Form heisst dann ***uneigentlich*** oder ***eigentlich primitiv***, je nachdem a, a', a'' alle gerade sind oder nicht. In ersterem Fall ist D gerade. Die ternäre Form

$$\begin{pmatrix} b^2-a'a'', & b'^2-a''a, & b''^2-aa' \\ ab-b'b'', & a'b'-b''b, & a''b''-bb' \end{pmatrix}$$

wurde bekanntlich von *Gauss* die adjungirte von f genannt. Im Folgenden soll jedoch der Kürze wegen die aus ihr durch Weghebung des grössten gemeinschaftlichen (positiven) Theilers Ω ihrer Coefficienten erhaltene primitive Form

$$F = \begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix},$$

wo also $\Omega A = b^2-a'a''$, $\Omega B = ab-b'b''$, u. s. w. ist, die ***adjungirte von*** f heissen. Die Determinante D von f ist durch Ω^2 theilbar, sie sei $= \Omega^2\Delta$; dann ist die Determinante von F gleich $\Delta^2\Omega$, und die adjungirte von F ist wieder f. Die Zahlen Ω und Δ sind positiv und heissen nach *Smith* die ***Invarianten*** von f.

Für die Eintheilung der ternären Formen in ***Ordnungen*** und ***Geschlechter*** möge es gestattet sein, auf die bezüglichen Abhandlungen von *Eisenstein* *) und *Smith* **) zu verweisen.

2. Im Folgenden kommt für den Nachweis der Aequivalenz zweier ternären Formen nachstehender Satz über die Darstellung von binären Formen durch ternäre in Anwendung (wobei immer nur von ***eigentlichen*** Darstellungen die Rede ist):

Zwei ternäre Formen derselben Invarianten Ω, Δ sind äquivalent, wenn sie beide eine und dieselbe primitive binäre Form der Determinante ΩM

---

*) Neue Theoreme der höheren Arithmetik, dieses Journal, Bd. 35.

**) On the orders and genera of ternary quadratic forms, Phil. Trans., vol. 157. Für Formen mit n Variabeln vergl. *Minkowski* „Sur la théorie des formes quadratiques etc." Mém. des sav. étrangers. t. 29.

darstellen, in welcher der Factor M eine in 2Δ nicht aufgehende Primzahl oder das Doppelte einer solchen Primzahl ist.

Derselbe ergiebt sich folgendermassen:

Damit eine primitive binäre (nicht negative) Form $\varphi = (p, q'', p')$ durch ternäre Formen der Invarianten Ω, Δ dargestellt werden könne, ist nothwendig, dass die Determinante von φ durch Ω theilbar sei (sie sei $= \Omega M$), und dass zwei Zahlen B, B' bestimmt werden können, welche den Congruenzen genügen

$$B^2 \equiv \Delta p, \quad BB' \equiv -\Delta q'', \quad B'^2 \equiv \Delta p' \quad (\text{mod.}\, M);$$

und wenn M prim ist zu Δ, sind diese Bedingungen auch hinreichend*).

Setzt man nämlich

$$a = p, \quad b'' = q'', \quad a' = p', \quad b = -\frac{Bp' + B'q''}{M}, \quad b' = -\frac{B'p + Bq''}{M},$$
$$A' = \frac{B^2 - \Delta p}{M}, \quad a'' = \frac{b'^2 - \Omega A'}{p},$$

so werden unter den gemachten Voraussetzungen b, b', a'' ganzzahlig und $f = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ eine indefinite ternäre Form der Invarianten Ω, Δ, durch welche die binäre Form φ dargestellt wird. Dasselbe gilt noch, wenn M und Δ gerade, aber $\frac{1}{2}M$ und $\frac{1}{2}\Delta$ ungerade und relativ prim sind; ist hingegen $\frac{1}{2}\Delta$ gerade und relativ prim zu $\frac{1}{2}M$, so hat f die Invarianten 2Ω, $\frac{1}{4}\Delta$, und φ kann durch ternäre Formen der Invarianten Ω, Δ nicht dargestellt werden. Hiebei sind zwei Formen f und f_1, welche bezw. den Congruenzwurzeln B, B' und B_1, B'_1 entsprechen, von vornherein äquivalent, wenn entweder $B_1 \equiv B$, $B'_1 \equiv B'$ oder $B_1 \equiv -B$, $B'_1 \equiv -B'$ (mod. M) ist. Ist M Primzahl oder das Doppelte einer ungeraden Primzahl, so giebt es keine andern incongruenten Lösungen der obigen Congruenzen, und daraus folgt der zu beweisende Satz.

3. Ferner wird folgender Satz benutzt werden, für dessen Beweis ich auf meine Abhandlung „*Ueber eine Eigenschaft der Pellschen Gleichung*“**) verweise:

Ist D eine positive ganze Zahl, 2^σ die grösste in D aufgehende Potenz von 2, $\sigma \leqq 4$, S^2 das grösste in D aufgehende ungerade Quadrat und $D = 2^\sigma S^2 D_1$,

---

*) Vgl. *Gauss* „*Disq. ar.*“ Art. 283; *Smith*, a. a. O. Art. 10.

**) Vierteljahrsschrift der zürch. naturf. Gesellschaft, 32. Jahrg.

so giebt es stets mit $2D$ theilerfremde Zahlen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ von der Beschaffenheit, dass für alle Primzahlen p, q, welche den Congruenzen

$$p \equiv \mathfrak{p}, \quad q \equiv \mathfrak{q} \quad (\text{mod.}\, 8SD_1)$$

genügen, die Pellsche Gleichung $t^2 - pqDu^2 = 1$ eine Fundamentalauflösung $t = T$, $u = U$ besitzt, für welche weder $T+1$ noch $T-1$ durch pq theilbar ist.

Dies ist z. B. der Fall, wenn p und q nach folgender Vorschrift gewählt werden*):

Es seien $s_1, s_2, \dots s_m$ diejenigen verschiedenen Primfactoren von S, welche nicht in D_1 aufgehen, $d_1, d_2, \dots d_n$ die Primfactoren von D_1. Man bestimme die quadratischen Charaktere des Products $pq = a$ in Bezug auf die Primfactoren $s_1, s_2, \dots s_m$ durch die Bedingungen:

$$(A.) \qquad \left(\frac{a}{s_k}\right) = -\left(\frac{-2^\sigma D_1}{s_k}\right) \qquad (k=1, 2, 3, \dots m),$$

und in Bezug auf die Primfactoren von D_1 durch die (immer erfüllbare) Bedingung $(B.)$, dass es unter den 2^n Formen

$$f(\delta) = \delta x^2 - 2^\sigma a \delta' y^2 \quad (\delta\delta' = D_1,\ \delta > 0),$$

deren Gesammtheit $\mathfrak{F}$ heissen möge, keine zwei gebe, welche in den Werthen aller n Symbole

$$\left(\frac{f(\delta)}{d_1}\right), \quad \left(\frac{f(\delta)}{d_2}\right), \quad \dots \quad \left(\frac{f(\delta)}{d_n}\right)$$

übereinstimmen oder, was dasselbe ist, dass $x^2 - 2^\sigma a D_1 y^2$ die einzige Form des Systems $\mathfrak{F}$ ist, für welche diese Symbole sämmtlich positiv sind. Ferner bezeichne man, wenn $\sigma = 0$, 1 oder 3 ist, mit r eine der Zahlen 3, 5, 7 und mit δ_r einen Theiler von D_1, indem man setzt:

a) wenn $D_1 = 1$ ist oder bloss Primfactoren der Form $8n+1$ enthält:

$$a \equiv r \quad (\text{mod.}\, 8), \quad \delta_r = 1;$$

b) wenn D_1, abgesehen von Primfactoren der Form $8n+1$, nur Primfactoren (d) von *einer* der drei Formen $8n+3$, 5, 7 enthält und $f(\delta)$ diejenige Form des Systems $\mathfrak{F}$ bezeichnet, für welche die Gleichungen

$$\left(\frac{f(\delta)}{d_k}\right) = \left(\frac{2}{d}\right)^{\frac{d_k-1}{2}} \left(\frac{-2}{d_k}\right) \qquad (k=1, 2, 3, \dots n)$$

*) a. a. O. S. 375.

stattfinden:

$$a \equiv r \quad \text{oder} \quad \equiv rd \pmod{8}, \quad \text{je nachdem} \quad \left(\frac{\delta}{a}\right) = +1 \quad \text{oder} \quad = -1,$$

$$\delta_r = 1 \quad \text{oder} \quad = \delta, \quad \text{je nachdem} \quad r \equiv d \pmod{8} \quad \text{oder nicht;}$$

c) wenn D_1 Primfactoren von wenigstens zwei der Formen $8n+3, 5, 7$ enthält, und $f(\delta_5)$, $f(\delta_7)$, $f(\delta_3)$ diejenigen Formen des Systems $\mathfrak{F}$ bezeichnen, für welche die Gleichungen

$$\left(\frac{f(\delta_5)}{d_k}\right) = \left(\frac{-1}{d_k}\right), \quad \left(\frac{f(\delta_7)}{d_k}\right) = \left(\frac{2}{d_k}\right), \quad \left(\frac{f(\delta_3)}{d_k}\right) = \left(\frac{-2}{d_k}\right) \qquad (k=1, 2, 3, \ldots n)$$

stattfinden*):

$$a \equiv \left(3\left(\frac{\delta_5}{a}\right) - 2\left(\frac{\delta_3}{a}\right)\right) r \pmod{8};$$

und unterwerfe nun p der Bedingung

$$(C.) \qquad \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{r^2-1}{8}} \left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{r-1}{2}} \left(\frac{\delta_r}{p}\right) = -1.$$

Wenn $\sigma = 2$ oder 4 ist, und

d) wenn D_1 keinen Primfactor der Form $4n+3$ enthält, setze man $\delta_r = 1$;

e) wenn D_1 wenigstens einen Primfactor der Form $4n+3$ enthält und $f(\delta)$ diejenige Form des Systems $\mathfrak{F}$ bezeichnet, für welche

$$\left(\frac{f(\delta)}{d_k}\right) = \left(\frac{-1}{d_k}\right) \qquad (k=1, 2, 3, \ldots n),$$

setze man $\delta_r = \delta$;

und nun unterwerfe man a und p den Bedingungen:

$$(C'.) \qquad a \equiv D_1 \pmod{4}, \quad \left(\frac{-\delta_r}{p}\right) = -1.$$

Die Bestimmungen für q folgen aus denjenigen für a und p.

Endlich bestimme man, was immer möglich ist, irgend welche mit $2SD_1$ theilerfremde Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ eines vollständigen Restsystems $(\text{mod.}\, 8SD_1)$, für welche die bezw. für a, p, q festgesetzten Beziehungen gelten, wobei die *Legendre*schen Symbole in erweitertem Sinne (nach *Jacobi*) zu ver-

---

*) Die Werthe von $\left(\frac{\delta}{a}\right)$, $\left(\frac{\delta_3}{a}\right)$, $\left(\frac{\delta_5}{a}\right)$, $\left(\frac{\delta_7}{a}\right)$ ergeben sich aus denjenigen von $\left(\frac{a}{d_k}\right)$ mittelst des quadratischen Reciprocitätsgesetzes.

stehen sind. Dass man alsdann für jedes Zahlenpaar $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ unendlich viele zugehörige Primzahlen p, q finden kann, für welche $p \equiv \mathfrak{p}$, $q \equiv \mathfrak{q}$ (mod. $8SD_1$), folgt aus dem bekannten Satze über die arithmetische Progression.

Bemerkung. Die obigen Festsetzungen reichen zwar hin, um $T+1$ und $T-1$ durch pq nicht theilbar zu machen, sind aber nicht nothwendig. Ist z. B. D eine Primzahl der Form $8n+3$, so müsste man nach jenen Vorschriften machen

$$\left(\frac{a}{D}\right) = +1, \quad \delta = D, \quad a \equiv r \quad \text{oder } 3r \quad (\text{mod. } 8),$$

je nachdem $a \equiv 1$ oder 3 (mod. 4); folglich (da $r = 3$ oder 5 oder 7)

$$a \equiv 5 \text{ oder } 7 \quad (\text{mod. } 8), \quad r = 5, \quad \delta_r = D, \quad \left(\frac{-D}{p}\right) = -1$$

oder (was dasselbe ist)

$$\left(\frac{p}{D}\right) = -1.$$

Eine besondere Untersuchung zeigt aber, dass in diesem Fall folgende Annahmen, unter welchen die vorigen enthalten sind, dasselbe leisten:

entweder $\left(\frac{a}{D}\right) = +1$ und $a \equiv 3$ oder 5 oder 7 (mod. 8), $\left(\frac{-D}{p}\right) = -1$

oder $\left(\frac{a}{D}\right) = -1$ und entweder $p \equiv q \equiv 5$ oder 7 (mod. 8)

oder $a \equiv 5$ (mod. 8) und $\left(\frac{-2D}{p}\right) = -1$

oder $a \equiv 3$ (mod. 4) und $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$.

4. Es sei f eine indefinite ternäre Form der Invarianten Ω, Δ; φ eine binäre Form der Determinante ΩM; Ω_2^2, Δ_2^2, Q^2 seien die grössten bezw. in Ω, Δ, ΩM aufgehenden Quadrate, $\Omega = \Omega_1 \Omega_2^2$ oder $= 2\Omega_1\Omega_2^2$, $\Delta = \Delta_1\Delta_2^2$ oder $= 2\Delta_1\Delta_2^2$, Ω_1 und Δ_1 ungerade, $\Omega M = M_1 Q^2$, 2^σ die grösste in Δ aufgehende Potenz von 2, und $\mathfrak{a}$ bedeute in Bezug auf Δ dasselbe, was im vorigen Artikel in Bezug auf D. Nun gilt der Satz:

Wenn die indefinite ternäre Form f der Invarianten Ω, Δ die eigentlich primitive binäre Form φ der Determinante ΩM darstellt, so stellt sie auch jede andere Form φ_1 dieser Determinante dar, welche mit φ in dasselbe Geschlecht gehört, vorausgesetzt, dass $\sigma \leq 4$, M_1 kein Theiler von $2\Delta_1$ sei, ferner, dass

$$(\alpha.) \qquad \left(\frac{\varphi}{\theta'}\right) = -\left(\frac{-2^\sigma \Delta_1}{\theta'}\right)$$

in Bezug auf jede ungerade Primzahl θ', welche zugleich in ΩM und Δ_2, aber nicht in Δ_1 aufgeht, und

$$(\beta.)\qquad \left(\frac{\varphi}{\theta}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}}{\theta}\right)$$

in Bezug auf jeden gemeinschaftlichen Primfactor von ΩM und Δ_1; ausserdem wenn $\sigma = 0$, 1 oder 3 und zugleich $\Omega M \equiv 0 \pmod{8}$, dass

$$(\gamma.)\qquad \varphi \equiv \mathfrak{a} \pmod{8},$$

und wenn $\sigma = 2$ oder 4 und zugleich $\Omega M \equiv 0$ oder $3 \pmod{4}$, dass

$$(\gamma'.)\qquad \varphi \equiv \mathfrak{a} \pmod{4}.$$

Beweis: Wenn die ternäre Form f die binäre Form $\varphi = (a, b'', a')$ (eigentlich) darstellt, so stellt sie auch jede mit φ äquivalente Form dar; daher darf angenommen werden, der Coefficient a sei positiv*) und prim zu $2\Omega\Delta M$. Aus der Voraussetzung folgt, dass f ebenfalls eigentlich primitiv sein muss und in die äquivalente Form $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ transformirt werden kann. Diese Form werde von vornherein für f gewählt. Durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & \nu & \varrho \end{pmatrix}, \quad (\lambda\varrho - \mu\nu = 1)$$

gehe f in $f_1 = \begin{pmatrix} a_1, & a'_1, & a''_1 \\ b_1, & b'_1, & b''_1 \end{pmatrix}$ über. Dann geht auch die adjungirte von f, $F = \begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix}$, durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & -\nu \\ 0 & -\mu & \lambda \end{pmatrix}$$

in $F_1 = \begin{pmatrix} A_1, & A'_1, & A''_1 \\ B_1, & B'_1, & B''_1 \end{pmatrix}$, die adjungirte von f_1, über, und es finden die Gleichungen statt:

$$a_1 = a, \quad b''_1 = b'\nu + b''\lambda, \quad A''_1 = A''\lambda^2 - 2B\lambda\nu + A'\nu^2.$$

Setzt man nun, wenn T, U die Fundamentalauflösung der *Pell*schen Gleichung

$$t^2 - a\Delta u^2 = 1$$

bezeichnet,

$$\lambda = T + BU, \quad \mu = -A'U, \quad \nu = A''U, \quad \varrho = T - BU,$$

*) Die Form φ kann nicht negativ sein, da sie sich durch die indefinite ternäre Form f positiver Determinante darstellen lässt.

so wird

$$\lambda\varrho - \mu\nu = 1,$$

$$A_1'' = A'' = M, \quad b_1'' = b''T - aB'U \equiv b''T \pmod{a}.$$

Nun lässt sich durch die Formen φ und φ_1 dasselbe Product zweier in $2\Omega\Delta M$ nicht aufgehenden Primzahlen p und q darstellen. Deshalb kann und soll vorausgesetzt werden, es sei a gleich einem solchen Product pq. Angenommen, es sei möglich, auch noch die weitere Bedingung zu erfüllen, dass $T+1$ und $T-1$ nicht durch $a = pq$ theilbar seien, so sind $\pm b''$, $\pm b_1''$ die vier incongruenten Wurzeln der Congruenz

$$x^2 \equiv \Omega M \pmod{pq},$$

und pq ist durch die Formen

$$\left(pq, \quad \pm b'', \quad \frac{b''^2 - \Omega M}{pq}\right) \text{ und } \left(pq, \quad \pm b_1'', \quad \frac{b_1''^2 - \Omega M}{pq}\right)$$

darstellbar und durch keine andern Formen der Determinante ΩM, welche diesen nicht äquivalent wären. Mit einer dieser Formen muss somit auch φ_1 äquivalent sein und sich also durch f darstellen lassen.

Es bleibt jetzt übrig zu untersuchen, in welchen Fällen das Product $a = pq$ den obigen Bedingungen gemäss gewählt werden kann, welche lauten:

1) a soll sich durch φ und φ_1 darstellen lassen;

2) weder $T+1$ noch $T-1$ soll durch a theilbar sein.

Durch die Bedingung 2) ist, soweit es sich um die Anwendung der Vorschriften des Art. 3 handelt, wobei $\sigma \leq 4$ sein muss, der Charakter von a in Bezug auf die Primfactoren von Δ_2 und (wenigstens theilweise) auch von Δ_1 vorgeschrieben, somit auch das Geschlecht von φ in Bezug auf diejenigen dieser Primzahlen, welche auch in der Determinante ΩM aufgehen. Dies ist ausgedrückt durch die Bedingungen (α.) und (β.). In Bezug auf die übrigen ungeraden Primfactoren von ΩM bleibt der Charakter von φ willkürlich. In Bezug auf die Moduln 4 oder 8 ergeben sich aus Art. 3 für das Geschlecht von φ offenbar die Bedingungen (γ.) und (γ'.).

Es fragt sich jetzt, ob, die Bedingungen (α.), (β.), (γ.) oder (γ'.) als erfüllt vorausgesetzt, die einzelnen Factoren p und q von a passend gewählt werden können. Zunächst ist pq durch φ und φ_1 zugleich darzustellen. Zu diesem Zwecke bemerke man, dass die aus φ und φ_1 zusammengesetzte Klasse $\varphi\varphi_1$ ins Hauptgeschlecht gehört und daher durch Duplication einer eigentlich primitiven Klasse ψ der Determinante ΩM gebildet werden kann,

so dass $\varphi\varphi_1 = \psi^2$ und, wenn $\psi\varphi_1^{-1} = \psi_1$ gesetzt wird (unter φ_1^{-1} die entgegengesetzte Klasse von φ_1 verstanden):

$$\varphi = \psi\psi_1, \quad \varphi_1 = \psi\psi_1^{-1}$$

wird. Die Formen ψ_1 und ψ_1^{-1} stellen aber dieselben Zahlen dar, und nach einem bekannten *Dirichlet*schen Satze lassen sich durch ψ und ψ_1 unendlich viele Primzahlen p und q bezw. darstellen, somit durch φ und φ_1 deren Product pq. Nun ist die Primzahl p nur der Bedingung ($C.$) oder ($C'.$) des Art. 3 unterworfen, in welcher δ_r ein Theiler von Δ_1 ist. Dieselbe ist mit der Gleichung

$$\left(\frac{\Omega M}{p}\right) = \left(\frac{M_1}{p}\right) = 1,$$

welche die Existenzbedingung des Geschlechts von ψ ausdrückt, immer verträglich, wenn, wie vorausgesetzt, M_1 in $2\Delta_1$ nicht aufgeht.

Lässt man nun ψ alle eigentlich primitiven Klassen der Determinante ΩM durchlaufen, welche der betreffenden Bedingung ($C.$) oder ($C'.$) genügen, so durchläuft $\varphi^{\mp 1}\psi^2$ *) entweder alle Klassen des Geschlechts G von φ oder nur die Hälfte H. Im ersten Fall wird $\varphi^{\mp 1}\psi^2$ für gewisse ψ gleich φ_1 werden, und der Satz ist bewiesen, im zweiten Fall nur, wenn φ_1 der Hälfte H angehört. Gehört hingegen φ_1 der andern Hälfte H_1 von G an, so sei $\varphi_0 = \varphi^{\mp 1}\psi^2$ eine Klasse von H. Diese kann durch f dargestellt werden, somit auch alle Klassen, welche in $\varphi_0^{\mp 1}\psi'^2$ enthalten sind, wo ψ' wieder dieselben Klassen durchläuft, wie ψ. Die Klassen $\varphi_0^{\mp 1}\psi'^2 = \varphi^{\mp 1}(\psi^{-1}\psi')^2$ gehören aber der Hälfte H_1 an, da für eine durch $\psi^{-1}\psi'$ darstellbare Primzahl p die Bedingung ($C.$), bezw. ($C'.$) nicht erfüllt ist.

Was die Klasse ψ_1 anbetrifft, durch welche q dargestellt wird, so ist sie durch φ und ψ bestimmt: $\psi_1 = \varphi\psi^{-1}$.

5. Unter Beibehaltung der im vorigen Artikel eingeführten Bezeichnungen (nur dass hier $a = 2pq$, $\mathfrak{a}$ gerade und $\frac{1}{2}\mathfrak{a}$ zu Δ prim sein muss) gilt ebenso der Satz:

Wenn eine uneigentlich primitive indefinite ternäre Form f der Invarianten Ω, Δ eine primitive binäre Form φ der Determinante ΩM darstellt, so stellt sie auch jede andere Form φ_1 dieser Determinante dar, welche mit φ in dasselbe Geschlecht gehört, vorausgesetzt dass $\sigma < 4$ sei, M_1 kein Theiler

*) Zugleich mit φ lässt sich auch die entgegengesetzte Klasse φ^{-1} durch f darstellen. Es ist hierbei vorausgesetzt, dass der Zahl r nur einer der Werthe 3, 5, 7 beigelegt werde; ist mehr als einer zulässig, so gilt der Satz a fortiori.

von Δ_1 *und das Geschlecht von* φ *den Bedingungen genüge*

$$\left(\frac{\varphi}{\theta'}\right) = -\left(\frac{-2^{\sigma+1}\Delta_1}{\theta'}\right), \quad \left(\frac{\varphi}{\theta}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}}{\theta}\right).$$

In diesem Falle muss auch φ uneigentlich primitiv sein, also $\Omega M \equiv 1 \pmod{4}$, und Charaktere von φ in Bezug auf die Moduln 4 oder 8 treten nicht auf.

Der Beweis ist dem vorigen ganz analog; nur lautet jetzt die bezügliche *Pell*sche Gleichung:

$$t^2 - 2pq\Delta u^2 = 1;$$

die Formen φ und φ_1 sind als aus $\alpha = \left(2,\ 1,\ \frac{1-\Omega M}{2}\right)$ und eigentlich primitiven Formen β und β_1 zusammengesetzt zu betrachten, und es ist zu setzen

$$\beta\beta_1 = \psi^2, \quad \psi\beta_1^{-1} = \psi_1; \quad \varphi = \alpha\psi\psi_1, \quad \varphi_1 = \alpha\psi\psi_1^{-1} \quad \text{u. s. w.}$$

6. Ist die ternäre Form f nebst ihrer adjungirten F eigentlich primitiv, so kann sie in eine ihr äquivalente $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ mit der adjungirten $\begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix}$ transformirt werden, für welche die Coefficienten a und A'' zu einander und zu $2\Omega\Delta$ prim sind*). Dann sind die Formen (a, b'', a') und (A'', B, A') eigentlich primitiv, und demnach lassen sich durch dieselben unendlich viele Primzahlen darstellen, und die Form f kann weiter so transformirt werden, dass a und A'' von einander verschiedene Primzahlen werden, welche in $2\Omega\Delta$ nicht aufgehen.

Es seien nun

$$f = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} a_1, & a'_1, & a''_1 \\ b_1, & b'_1, & b''_1 \end{pmatrix}$$

eigentlich primitive indefinite Formen, die in dasselbe Geschlecht der Invarianten Ω, Δ gehören, mit den ebenfalls eigentlich primitiven adjungirten

$$F = \begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} A_1, & A'_1, & A''_1 \\ B_1, & B'_1, & B''_1 \end{pmatrix},$$

welche in der eben angegebenen Weise transformirt sein sollen, so dass also a, a_1, A'', A''_1 Primzahlen sind, welche in $2\Omega\Delta$ nicht aufgehen, a von A'', a_1 von A''_1 verschieden.

---

*) *Smith,* a. a. O. Art. 9.

Ist $A'' = A_1''$, so sind

$$\varphi = (a,\ b'',\ a'),\quad \varphi_1 = (a_1,\ b_1'',\ a_1')$$

eigentlich primitive Formen derselben Determinante $\Omega A''$, welche demselben Geschlechte angehören. In Bezug auf die ungeraden Primfactoren von Ω folgt nämlich die Gleichheit der Charaktere daraus, dass f und f_1 demselben Geschlechte angehören, in Bezug auf A'' aus den Gleichungen

$$B^2 - A'A'' = a\Delta,\quad B_1^2 - A_1'A'' = a_1\Delta,$$

wonach

$$\left(\frac{\varphi}{A''}\right) = \left(\frac{a}{A''}\right) = \left(\frac{\Delta}{A''}\right) = \left(\frac{a_1}{A''}\right) = \left(\frac{\varphi_1}{A''}\right).$$

Ist $\Omega \equiv 0$ (mod. 4 oder 8), so ist ebenso bezw. $\varphi \equiv f \equiv f_1 \equiv \varphi_1$ (mod. 4 oder 8). Ist übrigens die Uebereinstimmung aller Charaktere von φ und φ_1 bis auf einen nachgewiesen, so muss sie auch für den letzten stattfinden, weswegen die Fälle $\Omega A'' \equiv 2, 3, 4, 6, 7$ (mod. 8) keiner weiteren Untersuchung bedürfen.

Nach Art. 4 stellt somit f_1 auch die Form φ dar unter den daselbst aufgestellten Bedingungen, wo jetzt aber θ und θ' in Ω aufgehen müssen, weil $M = A''$ zu Δ prim ist, und wo an Stelle von φ überall f gesetzt werden kann. Da nun beide Formen f und f_1 die binäre Form φ darstellen, in deren Determinante $\Omega A''$ der Factor A'' eine in 2Δ nicht aufgehende Primzahl ist, so sind sie (Art. 2) äquivalent. Bezeichnet man noch die höchste in Ω aufgehende Potenz von 2 mit 2^τ, so lassen sich demnach für die Aequivalenz von f und f_1 folgende Bedingungen als hinreichend (wenn auch nicht nothwendig) aufstellen:

(I.)

$$\sigma \leqq 4;\quad \left(\frac{f}{\theta'}\right) = -\left(\frac{-2^\sigma \Delta_1}{\theta'}\right),\quad \left(\frac{f}{\theta}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}}{\theta}\right)$$

für jede ungerade Primzahl θ', welche zugleich in Ω und Δ_2, aber nicht in Δ_1 aufgeht, und jeden gemeinschaftlichen Primfactor θ von Ω und Δ_1; ausserdem

wenn $\sigma = 0$, 1 oder 3, $\tau > 2$ $\quad : f \equiv \mathfrak{a}$ (mod. 8);

wenn $\sigma = 2$ oder 4 und $\tau > 1$ oder $\tau = 0$ und $F \equiv -\Omega$ (mod. 4) $\quad : f \equiv \mathfrak{a}$ (mod. 4).

Ist $a = a_1$, so sind ganz ebenso F und F_1, daher auch f und f_1 äquivalent, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:



(II.)

$$\tau \leqq 4; \quad \left(\frac{F}{\eta'}\right) = -\left(\frac{-2^\tau \Omega_1}{\eta'}\right), \quad \left(\frac{F}{\eta}\right) = \left(\frac{\mathfrak{A}}{\eta}\right)$$

für jede ungerade Primzahl η', welche zugleich in Δ und Ω_2, aber nicht in Ω_1 aufgeht, und jeden gemeinschaftlichen Primfactor η von Δ und Ω_1; ausserdem

wenn $\tau = 0$, 1 oder 3, $\sigma > 2$: $F \equiv \mathfrak{A}$ (mod. 8);

wenn $\tau = 2$ oder 4 und $\sigma > 1$ oder $\sigma = 0$, $f \equiv -\Delta$ (mod. 4) : $F \equiv \mathfrak{A}$ (mod. 4).

Hierbei hat $\mathfrak{A}$ in Bezug auf Ω dieselbe Bedeutung, wie a in Bezug auf Δ.

Ist weder $a = a_1$, noch $A'' = A_1''$, so stellt immerhin die Form f unter den Bedingungen (I.) jede binäre Form dar, welche mit (a, b'', a') in dasselbe Geschlecht gehört, somit alle Primzahlen, welche in gewissen durch den quadratischen Charakter von (a, b'', a') bedingten Linearformen $4\Omega A''x + k$ enthalten sind. Ebenso stellt f_1 alle Primzahlen dar, welche in gewissen durch das Geschlecht von (a_1, b_1'', a_1') bedingten Linearformen $4\Omega A_1''x + k_1$ enthalten sind. Da aber f und f_1 demselben Geschlecht angehören, so ist $\left(\frac{a}{\omega}\right) = \left(\frac{a_1}{\omega}\right)$ in Bezug auf jeden ungeraden Primfactor ω von Ω. Es handelt sich jetzt nur noch darum, die Uebereinstimmung von a und a_1 in Bezug auf die Moduln 4 oder 8 nachzuweisen, wobei folgende Fälle zu unterscheiden sind:

1°. $\Omega \equiv 1$ (mod. 2).

In diesem Falle haben die Formen (a, b'', a') und (a_1, b_1'', a_1'), also auch k und k_1, nur dann jede einen bestimmten Charakter (mod. 4), wenn $\Omega A'' \equiv \Omega A_1'' \equiv 3$ (mod. 4) ist, also $A'' \equiv A_1''$ (mod. 4), und da aus der Gleichung, welche die Existenzbedingung ternärer Geschlechter ausdrückt*), wenn $\Delta \equiv 1$ (mod. 2) oder $\equiv 0$ (mod. 4) ist,

$$(-1)^{\frac{\Omega_1 A''-1}{2} \cdot \frac{\Delta_1 a-1}{2}} = (-1)^{\frac{\Omega_1 A_1''-1}{2} \cdot \frac{\Delta_1 a_1-1}{2}}$$

folgt, so muss sein

$$a \equiv a_1 \quad (\text{mod. } 4).$$

Ist $\Delta \equiv 2$ (mod. 4), also $\Delta a \equiv \pm 2$ (mod. 8), so kann man immer annehmen, dass A'' und A_1'' nicht beide $\equiv 3\Omega$ (mod. 4) seien, da man durch die For-

*) *Smith*, a. a. O. Art. 8.

men (A'', B, A') und (A''_1, B_1, A'_1) Zahlen darstellen kann, die beliebig congruent ± 1 (mod. 4) sind.

2°. $\Omega \equiv 2$ (mod. 4).

Aus der Existenzbedingung ternärer Geschlechter folgt, wenn

$$\Delta \equiv 1 \pmod{2} \quad \text{oder} \quad \equiv 0 \pmod{4}$$

ist, die Gleichung

$$(-1)^{\frac{\Omega_1 A''-1}{2} \cdot \frac{\Delta_1 a-1}{2} + \frac{a^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{\Omega_1 A''_1-1}{2} \cdot \frac{\Delta_1 a_1-1}{2} + \frac{a_1^2-1}{8}}.$$

Ist $\Delta \equiv 0$ (mod. 4), so muss $A'' \equiv A''_1$ (mod. 4) sein, da $F \equiv F_1$ (mod. 4) und daher, wenn $\Omega A'' \equiv \Omega A''_1 \equiv 2$ (mod. 8), also $\Omega_1 A'' \equiv \Omega_1 A''_1 \equiv 1$ (mod. 4):

$$(-1)^{\frac{a^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{a_1^2-1}{8}};$$

hingegen wenn $\Omega A'' \equiv \Omega A''_1 \equiv 6$ (mod. 8), da

$$\frac{\Delta_1 a-1}{2} \equiv \frac{\Delta_1-1}{2} + \frac{a-1}{2} \pmod{2}:$$

$$(-1)^{\frac{a-1}{2} + \frac{a^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{a_1-1}{2} + \frac{a_1^2-1}{8}};$$

d. h. die Formen (a, b'', a') und (a_1, b''_1, a'_1) haben denselben Charakter (mod. 8). Ist $\Delta \equiv 1$ (mod. 2), so kommt der Fall $A'' \equiv -A''_1$ (mod. 4) nicht in Betracht, weil dann die Formen (a, b'', a') und (a_1, b''_1, a'_1) immer wenigstens in einem der Reste 1, 3, 5, 7 (mod. 8) übereinstimmen, und der Fall $A'' \equiv A''_1$ (mod. 4) erledigt sich wie vorhin.

Ist $\Delta \equiv 2$ (mod. 4), so sind die Determinanten von (A'', B, A') und (A''_1, B_1, A'_1) congruent ± 2 (mod. 8), und man kann es immer so einrichten, dass $A'' \equiv -A''_1$ (mod. 4) wird, und dann können auch a und a_1 gleiche Reste, mod. 8, erhalten.

3°. $\Omega \equiv 0$ (mod. 4).

Je nachdem $\Omega \equiv 4$ oder $\equiv 0$ (mod. 8), muss $a \equiv a_1$ (mod. 4 oder 8) sein, da f und f_1 demselben Geschlecht angehören.

Da A'' und A''_1 von einander verschiedene Primzahlen sind, ergiebt sich also in allen Fällen, dass wenigstens eine der Linearformen $4\Omega A'' x + k$ mit wenigstens einer der Linearformen $4\Omega A''_1 x + k_1$ verträglich ist. Also haben diese Linearformen eine gewisse Anzahl (wenigstens eine) von Linearformen $4\Omega A'' A''_1 x + l$ gemein, und die Formen f und f_1 können alle in den letzteren Linearformen enthaltenen (unendlich vielen) Primzahlen gemeinschaft-

lich darstellen. Deswegen kann man sich diese Formen immer so transformirt denken, dass $a = a_1$ wird, womit die Sache auf den vorigen Fall zurückgeführt und der Satz bewiesen ist:

Zwei eigentlich primitive indefinite ternäre Formen, deren adjungirte ebenfalls eigentlich primitiv sind, und welche demselben Geschlechte der Invarianten Ω, Δ angehören, sind immer äquivalent, wenn die Bedingungen (I.) *und* (II.) *erfüllt sind.*

7. Es bleibt noch der Fall zu behandeln, dass von den Formen f und F die eine uneigentlich primitiv und somit die andere eigentlich primitiv ist. Da der Beweis sich ganz ähnlich gestaltet wie vorhin, wird eine kürzere Behandlung genügen.

Ist die Form f uneigentlich primitiv, so ist Ω ungerade, Δ gerade, und f kann in eine ihr äquivalente Form $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ mit der adjungirten $\begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix}$ transformirt werden, so dass $\frac{1}{2}a$ und A'' von einander verschiedene Primzahlen werden, die in $\Omega\Delta$ nicht aufgehen. Es seien nun

$$f = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} a_1, & a'_1, & a''_1 \\ b_1, & b'_1, & b''_1 \end{pmatrix}$$

uneigentlich primitive Formen, die demselben Geschlecht der Invarianten Ω, Δ angehören, mit den adjungirten

$$F = \begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} A_1, & A'_1, & A''_1 \\ B_1, & B'_1, & B''_1 \end{pmatrix},$$

wo $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a_1$, A'', A''_1 Primzahlen bedeuten, die in $\Omega\Delta$ nicht aufgehen, und $\frac{1}{2}a$ von A'', $\frac{1}{2}a_1$ von A''_1 verschieden ist.

Ist $A'' = A''_1$, so sind $\varphi = (a, b'', a')$, $\varphi_1 = (a_1, b''_1, a'_1)$ uneigentlich primitive Formen der Determinante $\Omega A''$, die in dasselbe Geschlecht gehören, woraus nach Art. 5 folgt, dass f_1 auch φ darstellt und daher mit f äquivalent ist, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{(III.)} \qquad \sigma < 4; \quad \left(\frac{f}{\theta'}\right) = -\left(\frac{-2^{\sigma+1}\Delta_1}{\theta'}\right), \quad \left(\frac{f}{\theta}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}}{\theta}\right),$$

wo $\mathfrak{a}$ in der Bedeutung des Art. 5, θ' und θ in derjenigen des Art. 6 zu verstehen sind.

Ist $a = a_1$, so sind $\Phi = (A'', B, A')$ und $\Phi_1 = (A''_1, B_1, A'_1)$ eigentlich primitive Formen der Determinante Δa, die demselben Geschlecht angehören (es ist $\Omega A'' \equiv \Omega A''_1 \equiv 1$ (mod. 4), daher $A'' \equiv A''_1$ (mod. 4)), woraus nach

Art. 4 folgt, dass F_1 auch Φ darstellt und daher mit F äquivalent ist, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{(IV.)} \quad \begin{cases} \left(\frac{F}{\eta'}\right) = -\left(\frac{-\Omega_1}{\eta'}\right), \quad \left(\frac{F}{\eta}\right) = \left(\frac{\mathfrak{A}}{\eta}\right), \\ \text{ausserdem wenn } \sigma > 1: \quad F \equiv \mathfrak{A} \pmod{8}, \end{cases}$$

wo η, η', $\mathfrak{A}$ wiederum dasselbe bedeuten wie im vorigen Artikel.

Ist weder $a = a_1$, noch $A'' = A_1''$, so lassen sich unter den Bedingungen (III.) zunächst Linearformen $4\Omega A''x + k$, $4\Omega A_1''x + k_1$ angeben, welche nur solche Primzahlen enthalten, die sich bezw. durch $\frac{1}{2}f$ und $\frac{1}{2}f_1$ darstellen lassen, und welche eine gewisse Anzahl von Linearformen $4\Omega A''A_1''x + l$ gemein haben. Die in letzterer Form enthaltenen Primzahlen lassen sich also durch $\frac{1}{2}f$ und $\frac{1}{2}f_1$ zugleich darstellen, und daher können f und f_1 so transformirt werden, dass ihr erster Coefficient gleich dem Doppelten einer dieser Primzahlen wird. Damit ist die Sache auf den eben behandelten Fall $a = a_1$ reducirt und der Satz bewiesen:

Wenn zwei uneigentlich primitive indefinite ternäre Formen der Invarianten Ω, Δ einem und demselben Geschlecht angehören, das den Bedingungen (III.) *und* (IV.) *genügt, so sind sie äquivalent.*

Speciell gilt der Satz:

Zwei primitive indefinite ternäre Formen sind äquivalent, wenn sie demselben Geschlecht angehören und ihre Invarianten weder durch 4 theilbar sind, noch einen ungeraden gemeinschaftlichen Theiler haben.

lich darstellen. Deswegen kann man sich diese Formen immer so transformirt denken, dass $a = a_1$ wird, womit die Sache auf den vorigen Fall zurückgeführt und der Satz bewiesen ist:

Zwei eigentlich primitive indefinite ternäre Formen, deren adjungirte ebenfalls eigentlich primitiv sind, und welche demselben Geschlechte der Invarianten Ω, Δ angehören, sind immer äquivalent, wenn die Bedingungen (I.) *und* (II.) *erfüllt sind.*

7. Es bleibt noch der Fall zu behandeln, dass von den Formen f und F die eine uneigentlich primitiv und somit die andere eigentlich primitiv ist. Da der Beweis sich ganz ähnlich gestaltet wie vorhin, wird eine kürzere Behandlung genügen.

Ist die Form f uneigentlich primitiv, so ist Ω ungerade, Δ gerade, und f kann in eine ihr äquivalente Form $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ mit der adjungirten $\begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix}$ transformirt werden, so dass $\frac{1}{2}a$ und A'' von einander verschiedene Primzahlen werden, die in $\Omega\Delta$ nicht aufgehen. Es seien nun

$$f = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} a_1, & a'_1, & a''_1 \\ b_1, & b'_1, & b''_1 \end{pmatrix}$$

uneigentlich primitive Formen, die demselben Geschlecht der Invarianten Ω, Δ angehören, mit den adjungirten

$$F = \begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} A_1, & A'_1, & A''_1 \\ B_1, & B'_1, & B''_1 \end{pmatrix},$$

wo $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a_1$, A'', A''_1 Primzahlen bedeuten, die in $\Omega\Delta$ nicht aufgehen, und $\frac{1}{2}a$ von A'', $\frac{1}{2}a_1$ von A''_1 verschieden ist.

Ist $A'' = A''_1$, so sind $\varphi = (a, b'', a')$, $\varphi_1 = (a_1, b''_1, a'_1)$ uneigentlich primitive Formen der Determinante $\Omega A''$, die in dasselbe Geschlecht gehören, woraus nach Art. 5 folgt, dass f_1 auch φ darstellt und daher mit f äquivalent ist, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{(III.)} \qquad \sigma < 4; \quad \left(\frac{f}{\theta'}\right) = -\left(\frac{-2^{\sigma+1}\Delta_1}{\theta'}\right), \quad \left(\frac{f}{\theta}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}}{\theta}\right),$$

wo $\mathfrak{a}$ in der Bedeutung des Art. 5, θ' und θ in derjenigen des Art. 6 zu verstehen sind.

Ist $a = a_1$, so sind $\Phi = (A'', B, A')$ und $\Phi_1 = (A''_1, B_1, A'_1)$ eigentlich primitive Formen der Determinante Δa, die demselben Geschlecht angehören (es ist $\Omega A'' \equiv \Omega A''_1 \equiv 1$ (mod. 4), daher $A'' \equiv A''_1$ (mod. 4)), woraus nach

Art. 4 folgt, dass F_1 auch Φ darstellt und daher mit F äquivalent ist, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{(IV.)} \quad \begin{cases} \left(\frac{F}{\eta'}\right) = -\left(\frac{-\Omega_1}{\eta'}\right), \quad \left(\frac{F}{\eta}\right) = \left(\frac{\mathfrak{A}}{\eta}\right), \\ \text{ausserdem wenn } \sigma > 1: \quad F \equiv \mathfrak{A} \pmod{8}, \end{cases}$$

wo η, η', $\mathfrak{A}$ wiederum dasselbe bedeuten wie im vorigen Artikel.

Ist weder $a = a_1$, noch $A'' = A_1''$, so lassen sich unter den Bedingungen (III.) zunächst Linearformen $4\Omega A''x + k$, $4\Omega A_1''x + k_1$ angeben, welche nur solche Primzahlen enthalten, die sich bezw. durch $\frac{1}{2}f$ und $\frac{1}{2}f_1$ darstellen lassen, und welche eine gewisse Anzahl von Linearformen $4\Omega A'' A_1'' x + l$ gemein haben. Die in letzterer Form enthaltenen Primzahlen lassen sich also durch $\frac{1}{2}f$ und $\frac{1}{2}f_1$ zugleich darstellen, und daher können f und f_1 so transformirt werden, dass ihr erster Coefficient gleich dem Doppelten einer dieser Primzahlen wird. Damit ist die Sache auf den eben behandelten Fall $a = a_1$ reducirt und der Satz bewiesen:

Wenn zwei uneigentlich primitive indefinite ternäre Formen der Invarianten Ω, Δ einem und demselben Geschlecht angehören, das den Bedingungen* (III.) *und* (IV.) *genügt, so sind sie äquivalent.

Speciell gilt der Satz:

Zwei primitive indefinite ternäre Formen sind äquivalent, wenn sie demselben Geschlecht angehören und ihre Invarianten weder durch 4 theilbar sind, noch einen ungeraden gemeinschaftlichen Theiler haben.

---

nur der Lichtäther sein kann, wenn nach der Substitution (6.) identisch:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = 2V\lambda_i \tag{7.}$$

ist.

Anstatt nun die Substitutionen (6.) in F zu machen, und die alsdann verschwindenden Terme fortzulassen, kann man nun offenbar auch den Rest von F für das Divisorensystem

$$M \sim (\xi_{ii}-\lambda_i^2,\ \xi_{ik}-2\lambda_i\lambda_k) \qquad (i \gtrless k), \tag{8.}$$

oder ein ihm äquivalentes betrachten. Um diese Untersuchung einfacher durchführen zu können, trennen wir in der Form F die beiden Systeme $\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}; \xi_{23}, \xi_{31}, \xi_{12}$ von einander, dann lässt sich dieselbe offenbar folgendermassen schreiben:

$$F = F_0(\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33})+B(\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}; \xi_{23}, \xi_{31}, \xi_{12})+F_1(\xi_{23}, \xi_{31}, \xi_{12}), \tag{9.}$$

wo F_0 und F_1 quadratische Formen bedeuten, und B eine bilineare Form ihrer Argumente ist. Man kann nun das Modulsystem (8.) leicht durch ein äquivalentes M' ersetzen, für welches in dem Ausdrucke von F in (9.) die letzte Form $F_1(\xi_{23}, \xi_{31}, \xi_{12})$ fehlt. Berücksichtigt man nämlich, dass die sechs Ausdrücke:

$$\xi_{ik}^2-4\xi_{ii}.\xi_{kk}, \quad \xi_{ik}.\xi_{il}-2\xi_{ii}.\xi_{kl} \tag{10.}$$

bei der Substitution (6.) verschwinden, dass sie also den Elementen des Divisorensystemes (8.) hinzugefügt werden können, ohne dasselbe zu ändern, so erkennt man, dass für das so veränderte Modulsystem M' alle Terme der Form F_1 durch solche ersetzt werden können, welche einer der Formen F_0 oder B angehören. Es ist also:

$$F \equiv F_0(\xi_{ii})+B(\xi_{ii};\ \xi_{kl}) \quad \text{mod.}(M') \qquad \binom{i,\,k,\,l=1,\,2,\,3}{k\gtrless l}.$$

Es sind dann alle Terme von F_0 und B nach der Substitution (6.) beziehlich von der Form $\lambda_i^2\lambda_k^2$ und $\lambda_i^2\lambda_k\lambda_l$ $(k \gtrless l)$; dieselben sind dann also sämmtlich von einander verschieden, und man erkennt leicht, dass alle Terme von B und nur sie mindestens eine der Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nur in der ersten Potenz enthalten.

Denkt man sich aber den so erhaltenen Ausdruck von F nach der Substitution (6.) nach Potenzen der λ_i entwickelt, so ergiebt sich aus der Bedingung (7.), dass alle Glieder, welche eine der Grössen λ_i nur in der ersten Potenz enthalten, verschwinden müssen. Nach der soeben gemachten Bemerkung muss also die ganze bilineare Form B fortfallen, und man erhält als nothwendige Bedingung:

$$F \equiv F_0(\xi_{ii}) = \Sigma\alpha_{ik}\xi_{ii}\xi_{kk} \quad \text{mod.}(M'). \tag{11.}$$

Dann nehmen aber die Gleichungen (7.) die Form an

$$\frac{\partial F_0}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial F_0}{\partial \xi_{ii}} 2\lambda_i = 2V\lambda_i,$$

oder

$$\frac{\partial F_0}{\partial \xi_{11}} = \frac{\partial F_0}{\partial \xi_{22}} = \frac{\partial F_0}{\partial \xi_{33}} = V,$$

und hieraus folgt durch nochmalige Differentiation:

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi_{ii} \partial \xi_{kk}} = 2a_0,$$

wo a_0 eine von i und k unabhängige Constante bedeutet; nach dem *Euler*-schen Satze über homogene Functionen ergiebt sich also für die Form F_0 der Ausdruck:

$$F_0(\xi_{ii}) = \tfrac{1}{2}\Sigma \xi_{ii} \xi_{kk} \frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi_{ii} \partial \xi_{kk}} = a_0(\xi_{11}+\xi_{22}+\xi_{33})^2.$$

Substituirt man diesen Werth von F_0 in die Bedingung (11.) und ersetzt dort die Congruenz für das Modulsystem (M') durch die ihr entsprechende Gleichung, so ergiebt sich, dass sich das Potential F dann und nur dann auf den Lichtäther in einem krystallinischen festen Körper beziehen kann, wenn

$$(12.)\quad \begin{cases} F = a_0(\xi_{11}+\xi_{22}+\xi_{33})^2 \\ \qquad +a_{11}(\xi_{23}^2-4\xi_{22}\xi_{33})+a_{22}(\xi_{31}^2-4\xi_{33}\xi_{11})+a_{33}(\xi_{12}^2-4\xi_{11}\xi_{22}) \\ \qquad +2a_{12}(\xi_{31}\xi_{32}-2\xi_{33}\xi_{12})+2a_{23}(\xi_{12}\xi_{13}-2\xi_{11}\xi_{23})+2a_{31}(\xi_{23}\xi_{21}-2\xi_{22}\xi_{31}) \end{cases}$$

ist, wo a_0 und die Grössen a_{ik} willkürliche Constanten bedeuten.

Giebt man den Indices i, k, l alle Werthe zwischen 1 und n, wo n eine beliebige ganze Zahl ist, so erhält man die Lösung des entsprechenden Problems für eine quadratische Form $F(\xi_{ik})$ von $2n$ Variablen.

Die hier behandelte einfache Aufgabe ist zuerst von Green (Transactions of the Cambridge Philosophical Society 1839) und später von G. Kirchhoff in seinen ersten Vorlesungen über Elasticitätstheorie und Optik gelöst worden. Die Discussion der Bedingungsgleichungen führte hier durch Coefficientenvergleichung auf 15 einfache lineare Relationen zwischen den 21 Coefficienten von F, durch deren Auflösung sich dann die Form (12.) des Potentiales ergab. Später wurde diese etwas ausgedehnte Untersuchung fortgelassen und nur ihr Resultat und die Verification desselben angegeben, und dasselbe ist dann auch in der demnächst erscheinenden Herausgabe dieser Vorlesungen geschehen. Die kleine dort entstandene Lücke soll durch die obigen einfachen Bemerkungen ausgefüllt werden.

Anwendung der Modulsysteme auf eine Frage der Determinantentheorie.

(Von Herrn *E. Netto* in Giessen.)

Es giebt in der Algebra eine ganze Reihe elementarer Probleme, die noch der Lösung harren. Die Anwendung der Modulsysteme auf die verschiedensten Fragen hat nicht nur eine Fülle solcher Aufgaben ans Licht gezogen, sondern auch die Mittel zu ihrer Behandlung geliefert. Die Arbeiten des Herrn *L. Kronecker* liefern reichhaltige Belege hierfür.

Im Bande CVII dieses Journals hat Herr *Kronecker* die Beziehung der beiden reciproken Systeme

$$(1.)\qquad M_{gh} = \sum_i u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh},\quad \bar{M}_{gh} = \sum_i v_{gi} u_{ih} - \delta_{gh}\qquad (i, g, h = 1, 2, \dots n)$$

zu einander untersucht. Dabei bedeuten die u, v beliebige Variable; δ_{gh} ist, wie gewöhnlich, gleich 1 oder 0, je nachdem g, h einander gleich oder von einander verschieden sind. Dass beide Systeme (1.) einander äquivalent seien, leuchtet aus ihrem reciproken Verhältnisse sofort ein; aber erst der Begriff der Modulsysteme führt zu der präcisen Frage nach einer Darstellung der $\bar{M}_{gh}$ als homogener, linearer Functionen der M_{gh} mit ganzzahligen, dem Gebiete der u, v angehörigen Coefficienten. Herr *Kronecker* ist dabei (a. a. O. S. 260) zu einer Formel (R''.) gelangt, in welcher die Darstellung derart gegeben ist, dass die Dimension der Coefficienten bis zur Zahl $2n$ aufsteigt. Herr *Kronecker* fügt hinzu: „diese Relation scheint aber noch einer Vereinfachung fähig zu sein; wenigstens habe ich für den Fall $n = 2$ Relationen gefunden, deren Dimension nur 4 ist; ... aber für *beliebige* Zahlen n muss die Ermittelung der Relation *niedrigster* Dimension

$$(2.)\qquad \bar{M}_{ik} = \sum_{g,h} F_{gh}^{(ik)} M_{gh}\qquad (g, h, i, k = 1, 2, \dots n)$$

weiterer Untersuchung vorbehalten bleiben".

Ich habe diese Frage zwar bisher in ihrer Allgemeinheit nicht zu

lösen vermocht; da ich aber zu einer Relation (2.) gelangt bin, deren Dimension in den $F_{gk}^{(ik)}$ nur bis $(2n-2)$ steigt, so dass gegen die *Kronecker*sche Formel eine Erniedrigung um zwei Einheiten erreicht wird, so scheint mir das Resultat doch der Mittheilung werth zu sein.

Wir setzen

$$|u_{ik}| = U, \quad |v_{ik}| = V,$$
$$\frac{\partial U}{\partial u_{ik}} = U_{ki}, \quad \frac{\partial V}{\partial v_{ik}} = V_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n);$$

componiren wir nun die beiden Systeme

$$\begin{array}{ccc|ccccccc} u_{11}, & \dots & u_{1n} & & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & \\ u_{k-1,1}, & \dots & u_{k-1,n} & v_{11}, & \dots & v_{1,i-1}, & v_{1,i+1}, & \dots & v_{1,n} & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & , \\ u_{k+1,1}, & \dots & u_{k+1,n} & v_{n1}, & \dots & v_{n,i-1}, & v_{n,i+1}, & \dots & v_{n,n} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & \\ u_{n1}, & \dots & u_{n,n} & & & & & & & \end{array}$$

so ergiebt sich

$$(3.) \qquad \sum_g V_{ig} U_{gk} = |M_{rs} + \delta_{rs}| \qquad \begin{pmatrix} g,\ i,\ k = 1, 2, \dots n \\ r = 1, \dots k-1,\ k+1, \dots n \\ s = 1, \dots i-1,\ i+1, \dots n \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt also nebenbei

$$\sum_g V_{ig} U_{gk} \equiv \delta_{ik} \quad (\text{modd.}\, M_{gh}) \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \dots n)$$

und ebenso

$$\sum_g U_{ig} V_{gk} \equiv \delta_{ik} \quad (\text{modd.}\, \bar{M}_{gh}) \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \dots n).$$

Für die linke Seite der Gleichung (3.) erhält man sofort noch die Determinanten-Darstellungen

$$(4.) \quad \begin{vmatrix} v_{11} & \dots & v_{1,i-1} & U_{1k} & v_{1,i+1} & \dots & v_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{n1} & \dots & v_{n,i-1} & U_{nk} & v_{n,i+1} & \dots & v_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{k-1,1} & V_{i1} & u_{k+1,1} & \dots & u_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{1n} & \dots & u_{k-1,n} & V_{in} & u_{k+1,n} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix},$$

so dass jede Seite von (4.) gleich der rechten Seite von (3.) oder auch $\equiv \delta_{ik}$ (modd. M_{gh}) gesetzt werden kann. —

Berechnet man nun v_{ik} aus den beiden Gleichungssystemen

$$\sum_g v_{ig} u_{gh} = \bar{M}_{ih} + \delta_{ih}, \quad \sum_g u_{hg} v_{gk} = M_{hk} + \delta_{hk} \qquad (g, h, i, k = 1, \dots n)$$

und setzt die Resultate einander gleich, so zeigt sich, dass

$$\sum_g U_{ig}(M_{gk} + \delta_{gk}) = \sum_g U_{gk}(\bar{M}_{ig} + \delta_{ig})$$

und folglich auch

$$(5.)\qquad \sum_g U_{ig} M_{gk} = \sum_g U_{gk} \bar{M}_{ig} \qquad (g,\ i,\ k = 1,\ 2,\ \dots\ n)$$

ist. Auf ähnliche Weise erhält man

$$(6.)\qquad \sum_g V_{gk} M_{ig} = \sum_g V_{ig} \bar{M}_{gk} \qquad (g,\ i,\ k = 1,\ 2,\ \dots\ n).$$

Zu diesen beiden Systemen (5.), (6.) können wir die beiden

$$(7.)\qquad \sum_g v_{ig} M_{gk} = \sum_g v_{gk} \bar{M}_{ig},$$

$$(8.)\qquad \sum_g u_{gk} M_{ig} = \sum_g u_{ig} \bar{M}_{gk} \qquad (g,\ i,\ k = 1,\ 2,\ \dots\ n)$$

hinzunehmen, deren Richtigkeit ohne Weiteres ersichtlich wird, wenn man statt der M, $\bar{M}$ ihre Ausdrücke in den u, v einträgt.

In (7.) und (5.) lassen wir jetzt i unbestimmt und setzen in (7.) für k die Werthe $1, 2, \dots n-1$, in (5.) für k den Werth n. Aus den so erhaltenen n Gleichungen berechnen wir die $\bar{M}_{ig}$. Dann folgt unter Berücksichtigung von (3.) und (4.)

$$(9.)\qquad \bar{M}_{ik} |M_{gh} + \delta_{gh}| = \sum_{g,r,s} v_{ir} \frac{\partial V_{gk}}{\partial v_{sn}} U_{sn} M_{rg} + \sum_s U_{is} V_{nk} M_{sn}$$
$$(g,\ h = 1,\ 2,\ \dots\ n-1;\ i,\ k,\ r,\ s = 1,\ 2,\ \dots\ n).$$

Die Summation nach s erstreckt sich in der ersten Summe der rechten Seite eigentlich nur über $s = 1, \dots k-1, k+1, \dots n$; sie kann aber offenbar auch über $s = k$ erstreckt werden. Die Determinante auf der linken Seite ist congruent 1 (modd. M_{gh}). Die Dimensionen der Coefficienten wie der Determinante betragen in den u, v gerade $2n-2$. Es ist also durch (9.) die versprochene Formel geliefert.

Im Anschlusse an den zweiten Theil der rechten Seite von (9.) sei bemerkt, dass man hat

$$\sum_{g,h} U_{ig} (M_{gh} + \delta_{gh}) V_{hk} = U V . \delta_{ik} \qquad (g,\ h,\ i,\ k = 1,\ 2,\ \dots\ n).$$

Theorie der elliptisch-hyperelliptischen Functionen von vier Argumenten.

(Von Herrn *F. Schottky* in Zürich.)

Erster Abschnitt.

§ 1.

Wenn man die Gleichungen betrachtet, die zwischen einem System von 4^ϱ Thetafunctionen bestehen, so kann man sich die Aufgabe stellen, algebraische Functionen von einer oder mehreren Veränderlichen zu finden, die, für die einzelnen Theta eingesetzt, sämmtliche Gleichungen befriedigen. Dies nenne ich eine particuläre Lösung der Thetarelationen. Ist eine solche gegeben, so darf man stets, wenigstens für beschränkte Werthe der Argumente, die einzelnen Theta den algebraischen Ausdrücken proportional setzen. Die Argumente selbst werden dann Integrale, und es erfolgt schliesslich, durch Anwendung des Additionstheorems, der Uebergang von der particulären Lösung zur allgemeinen. Diese Auffassung, sowie den Plan, namentlich die *Abel*schen Functionen von vier Variablen auf Grund der Thetarelationen zu behandeln, verdanke ich Mittheilungen, die mir über das Problem Herr *Weierstrass* im Jahre 1875 gemacht hat.

So entspringt die Darstellung, welche gewöhnlich den *Abel*schen Functionen zweier Variablen gegeben wird, aus derjenigen Particular-Lösung, in der eins der 16 Theta, gleichviel welches, den Werth 0 hat. Ich berühre diesen Fall mit einigen Worten. Es sei $\Theta(u, u')$ eine Function des Systems. Dann können die Quadrate der 15 übrigen linear-homogen durch Θ^2 und die drei Producte von Θ^2 mit den zweiten Ableitungen von $\log\Theta$ ausgedrückt werden. Setzt man nun $\Theta = 0$, so geht

$$\Theta^2 \frac{\partial^2 \log\Theta}{(\partial u)^2} \quad \text{in} \quad -\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2,$$

$$\Theta^2 \frac{\partial^2 \log\Theta}{\partial u\,\partial u'} \quad \text{in} \quad -\frac{\partial\Theta}{\partial u}\,\frac{\partial\Theta}{\partial u'},$$

$$\Theta^2 \frac{\partial^2 \log\Theta}{(\partial u')^2} \quad \text{in} \quad -\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u'}\right)^2$$

über. Unter der Annahme $\Theta = 0$ wird also jede andere Thetafunction gleich der Quadratwurzel aus einer homogenen Function zweiten Grades von $\frac{\partial \Theta}{\partial u}$ und $\frac{\partial \Theta}{\partial u'}$. Führt man jetzt als Hülfsgrösse ein:

$$-\frac{\frac{\partial \Theta}{\partial u}}{\frac{\partial \Theta}{\partial u'}} = x,$$

oder, was wegen der Gleichung $d\Theta = 0$ dasselbe ist:

$$\frac{du'}{du} = x,$$

so werden die 15 von 0 verschiedenen Theta proportional den Quadratwurzeln aus 15 ganzen Functionen zweiten Grades von x:

$$\Theta_m = \sqrt{G_m(x)}\frac{\partial \Theta}{\partial u'}.$$

Es ist leicht, diese Ausdrücke $G_m(x)$ genauer zu charakterisiren. Da es sechs ungerade Theta giebt, so existiren sechs halbe Perioden, denen wir die Indices 1, 2, ... 6 geben, von solcher Beschaffenheit, dass durch jede unser ausgewähltes Θ in ein ungerades Theta verwandelt wird. Diese ungeraden Theta, Θ_1, Θ_2, ... Θ_6, bilden eine azygetische Reihe; das heisst: wenn man irgend drei der Grössen herausgreift, Θ_α, Θ_β, Θ_γ, und die ergänzende Function $\Theta_{\alpha\beta\gamma}$ aufsucht, die den Quotienten

$$\frac{\Theta_\alpha \Theta_\beta}{\Theta_\gamma \Theta_{\alpha\beta\gamma}}$$

zu einer *Abel*schen Function macht, so ist diese *Abel*sche Function ungerade, und somit $\Theta_{\alpha\beta\gamma}$ ein gerades Theta.

Wir bilden nun die 15 zweigliedrigen Combinationen 12, 13, ... 56, die sich aus den sechs halben Perioden zusammensetzen lassen, und betrachten die Functionen $\Theta_{\alpha\beta}$, die aus Θ hervorgehen, indem man den Argumenten diese halben Perioden $\alpha\beta$ hinzufügt. Dann hat $\Theta_{\alpha\beta}$ die Eigenschaft, dass es durch die beiden halben Perioden α, β, ebenso wie Θ, in ungerade Functionen des Systems übergeführt wird. Vermehrt man aber die Argumente um eine der vier übrigen halben Perioden der Reihe 1, 2, ... 6, so geht zwar Θ in ein ungerades, $\Theta_{\alpha\beta}$ aber in ein gerades Theta über.

Da die sechs halben Perioden zu den Werthsystemen u, u' gehören, die der Bedingung $\Theta = 0$ genügen, so muss einer jeden ein besonderer

Werth e_a der Hülfsgrösse x entsprechen; da ferner $\Theta_{\alpha\beta}$ für die beiden Perioden α, β gleichzeitig mit Θ verschwindet, so ist die entsprechende Function $G_{\alpha\beta}(x)$ gleich 0 für $x = e_\alpha$ und $x = e_\beta$. Die fünfzehn ganzen Functionen $G_m(x)$ sind daher bis auf constante Factoren mit den Producten $(x-e_\alpha)\,(x-e_\beta)$ identisch.

Die Quadrate der Thetaquotienten — und somit überhaupt alle geraden *Abel*schen Functionen — werden hierdurch rationale Functionen von x. Bildet man irgend eine ungerade *Abel*sche Function y, so ist ihr Quadrat natürlich ebenfalls rational in x:

$$y^2 = R(x),$$

und es kann jetzt jede *Abel*sche Function der betrachteten Klasse in der Form dargestellt werden:

$$P(x)+Q(x)\sqrt{R(x)},$$

wo P und Q rational sind. Für y darf z. B. folgende Function gewählt werden:

$$\frac{\Theta_{12}\,\Theta_{34}}{\Theta_{45}\,\Theta_{46}} = C.\sqrt{\frac{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}{(x-e_4)(x-e_5)(x-e_6)}}.$$

Es sei z irgend eine gerade *Abel*sche Function von u, u'. Dann sind $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u'}$ ungerade. Beschränkt man in dem Differential

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial u'}du'$$

die Argumente durch die Gleichung $\Theta = 0$, so wird $du' = x du$, ferner dz das Differential einer rationalen Function von x, endlich werden $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u'}$ Producte rationaler Functionen mit der irrationalen y. Daher wird:

$$du = \frac{\lambda(x)\,dx}{y}, \quad du' = \frac{x\lambda(x)\,dx}{y},$$

wo auch $\lambda(x)$ eine rationale Function bedeutet.

§ 2.

Welche speciellen Annahmen zu machen sind, damit für $\varrho = 3$ die ungeraden Theta den 28 Wurzelfunctionen einer Curve vierter Ordnung proportional werden, dies ist bekannt. Aber es ist von Interesse, noch eine zweite, ganz andere particuläre Lösung ins Auge zu fassen, vermöge deren

die *Abel*schen Functionen dreier Variabeln sich einreihen in die Klasse, die ich elliptisch-hyperelliptisch nenne. Statt, wie für $\varrho = 2$, ein Theta gleich 0 zu setzen, nehmen wir zwei Functionen Θ_π, Θ_ϱ gleich 0 an. Dann werden die geraden *Abel*schen Functionen zwar nicht rational durch eine Hülfsgrösse x ausdrückbar sein, aber die zwischen ihnen bestehenden Gleichungen sind vom Range eins. Es ist ganz gleichgültig, welche beiden Functionen Θ_π, Θ_ϱ aus dem System der 64 man auswählt. Denn erst drei Theta bilden eine Gruppe, der eine bestimmte, von der Wahl der Fundamentalperioden und von der Vermehrung der Argumente um halbe Perioden unabhängige Eigenschaft zukommt: ihr azygetisches oder syzygetisches Verhalten. In einer früheren Arbeit (dieses Journal Bd. 105, S. 269) hatte ich das System der 64 Theta behandelt, unter der Voraussetzung, dass eine Function, die ohne Index blieb, gleich 0 gesetzt würde. Die übrigen wurden bezeichnet durch die Indices 1, 2, ... 7 und ihre Combinationen bis zur dritten Ordnung. Und zwar liessen sich die 63 Quadrate

$$\Theta^2_\alpha, \quad \Theta^2_{\alpha\beta}, \quad \Theta^2_{\alpha\beta\gamma}$$

proportional setzen speciellen homogenen Functionen vierten Grades

$$L_\alpha, \quad L_{\alpha\beta}, \quad L_{\alpha\beta\gamma}$$

von vier durch eine Gleichung sechsten Grades verbundenen Veränderlichen x, y, z, u.

Alle diese L verschwinden in sieben festen Punkten (1), (2), ... (7) von der zweiten Ordnung, L_α im Punkte (α) sogar von der dritten, während die übrigen dadurch charakterisirt sind, dass ein Zerfallen eintritt:

$$L_{\alpha\beta} = G_{\alpha,\beta} G_{\beta,\alpha},$$
$$L_{\alpha\beta\gamma} = F_{\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta\gamma}.$$

$G_{\alpha,\beta} = 0$ ist die Gleichung eines Kegels mit der Spitze in (α), der auch durch die übrigen Punkte, mit Ausnahme von (β), hindurchgeht. $F_{\alpha\beta\gamma} = 0$ ist die durch (α), (β), (γ) gelegte Ebene, $H_{\alpha\beta\gamma} = 0$ die Fläche dritten Grades, die gleichfalls durch (α), (β), (γ) hindurchgeht, aber die vier übrigen Grundpunkte zu Doppelpunkten hat. Der Durchschnitt der Flächen $G_{\alpha,\beta} = 0$, $G_{\beta,\alpha} = 0$ liegt auf der Fläche sechsten Grades, in der sich der Punkt (x, y, z, u) bewegen muss, damit die Gleichungen

$$\Theta_m = \sqrt{L_m}\,\Phi$$

gelten. Dasselbe gilt von der Linie $F_{\alpha\beta\gamma} = 0$, $H_{\alpha\beta\gamma} = 0$. In beiden Fällen sind die Schnittcurven elliptische.

Nehmen wir nun zur Gleichung $\Theta = 0$ etwa noch die folgende:

$$\Theta_{123} = 0$$

hinzu, so wird der Punkt (x, y, z, u) beschränkt auf die ebene Curve dritten Grades:

$$F_{123} = 0, \quad H_{123} = 0.$$

Wir können deshalb die vier Coordinaten x, y, z, u proportional oder auch gleich setzen vier elliptischen Thetafunctionen dritten Grades einer Veränderlichen w. Dadurch werden die Grössen L_m elliptische Theta vom zwölften Grade. Diese haben aber einen Factor sechsten Grades gemeinsam. Denn von den sieben Grundpunkten liegen (1), (2) und (3) auf der betrachteten Curve, und in diesen verschwindet jedes L_m von der zweiten Ordnung. Nach Absonderung dieses Factors bleiben nur Functionen sechsten Grades übrig, die ich $A_m(w)$ nenne:

$$\Theta_m = \sqrt{A_m(w)}\,\Psi.$$

Damit ist bewiesen:

Wenn man in dem System der 64 Theta irgend zwei, Θ_π und Θ_ϱ, gleich 0 setzt, so werden die Quadrate der übrigen proportional 62 gleichändrigen elliptischen Thetafunctionen sechsten Grades einer Veränderlichen w.

Die Gesammtheit aller geraden *Abel*schen Functionen geht dadurch in elliptische Functionen der Hülfsgrösse w, mit bestimmten Perioden, über. Unter einer elliptischen Function schlechtweg verstehe ich weiterhin nur eine solche, die dieser Klasse angehört.

Um das System der 62 Wurzelfunctionen $\sqrt{A_m(w)}$ zu bestimmen, dient folgende Betrachtung.

Greift man aus den 64 Theta irgend eins, Θ_a, heraus, so giebt es 28 halbe Perioden, ich will sie die Nullperioden von Θ_a nennen, durch die Θ_a in ungerade Functionen übergeführt wird.

Sind zwei Theta, Θ_a und Θ_b, gegeben, so haben diese 12 Nullperioden gemeinsam, die man in sechs Paare, (K, abK), ordnen kann. Denn lässt man K variiren, so ergeben sich im Ganzen sechs verschiedene Producte $\Theta_{aK}\Theta_{bK}$, in denen beide Factoren ungerade sind, und demnach sechs Paare halber Perioden, $K, abK; L, abL; M, abM$ etc., die sowohl Θ_a als Θ_b in ungerade Functionen verwandeln. Dieses System von sechs Producten ungerader Theta:

$$\Theta_{aK}\Theta_{bK}, \quad \Theta_{aL}\Theta_{bL}, \quad \ldots$$

hat eine weitere Eigenschaft, auf die wir noch zurückkommen. Es ist eine azygetische Reihe; das heisst: wenn wir drei Theta aus drei verschiedenen Gliedern nehmen, z. B. Θ_{aK}, Θ_{aL}, Θ_{aM}, und dann die ergänzende Function Θ_{aKLM} hinzunehmen, für welche der Quotient

$$\frac{\Theta_{aK}\Theta_{aL}}{\Theta_{aM}\Theta_{aKLM}}$$

eine *Abel*'sche Function darstellt, so ist diese *Abel*sche Function eine ungerade. Hieraus folgt, dass Θ_{aKLM} ein gerades Theta sein muss, und ebenso Θ_{bKLM}.

Nun nehmen wir an, dass drei Functionen Θ_a, Θ_b, Θ_c gegeben sind. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem Θ_a, Θ_b, Θ_c syzygetisch oder azygetisch sind.

Im ersteren Falle ist das Product

$$\Theta_a\Theta_b\Theta_c\Theta_{abc},$$

und allgemeiner, für eine beliebige Periode K:

$$\Theta_{aK}\Theta_{bK}\Theta_{cK}\Theta_{abcK}$$

eine gerade Function. Wenn also Θ_{aK}, Θ_{bK}, Θ_{cK} ungerade sind, so ist der vierte Factor ebenfalls ungerade. Nun sind dies aber Thetaproducte zweiter Stufe mit der Basis (0, *ab*, *ac*, *bc*), und unter den acht verschiedenen Producten mit dieser Basis ist nur eins, das lauter ungerade Factoren enthält. Daraus schliessen wir, dass in diesem Fall vier gemeinsame Nullperioden von Θ_a, Θ_b, Θ_c existiren, die eine Gruppe:

$$(K, Kab, Kac, Kbc)$$

bilden.

Sind dagegen Θ_a, Θ_b, Θ_c azygetisch, so ist

$$\Theta_{aK}\Theta_{bK}\Theta_{cK}\Theta_{abcK}$$

stets eine ungerade Function. Wenn also Θ_{aK}, Θ_{bK} ungerade sind, so ist von den beiden folgenden Factoren, Θ_{cK} und Θ_{abcK}, nothwendig der eine gerade, der andre ungerade. Bei jedem Paar *K*, *abK* gemeinsamer Nullperioden von Θ_a, Θ_b ist deshalb die eine auch Nullperiode von Θ_c, die andere nicht. Demnach erhalten wir hier genau sechs halbe Perioden:

$$K,\ L,\ M,\ N \text{ etc.},$$

die gleichzeitig Θ_a, Θ_b, Θ_c in ungerade Functionen überführen. Wir können hinzufügen, dass die Reihen:

$$\Theta_{aK},\quad \Theta_{aL},\quad \Theta_{aM},\quad \ldots,$$
$$\Theta_{bK},\quad \Theta_{bL},\quad \Theta_{bM},\quad \ldots,$$
$$\Theta_{cK},\quad \Theta_{cL},\quad \ldots,$$

azygetische sind, und dass deshalb den componirten Indices ***aKLM, aKLN, bKLM*** etc. gerade Theta entsprechen.

Θ_π und Θ_ϱ sind die beiden Functionen, die gleich 0 gesetzt werden sollen. Aus den übrigen, und zwar aus der Gruppe derer, die zu Θ_π und Θ_ϱ azygetisch sind, wählen wir irgend eine Function aus, die wir als Θ_σ bezeichnen. Θ_π, Θ_ϱ und Θ_σ haben dann sechs Nullperioden gemeinsam, denen wir die Indices 1, 2, ... 6 beilegen. Wir fassen nun:

$$\Theta_\pi,\quad \Theta_\varrho,\quad \Theta_\sigma \quad \text{und} \quad \Theta_{\pi\varrho\sigma}$$

als Grundfunctionen auf und lassen hieraus die 60 übrigen entspringen, indem wir zu den Argumenten die 15 zweigliedrigen Combinationen der halben Perioden 1, 2, ... 6 hinzufügen. Demnach sind diese abgeleiteten Theta als:

$$\Theta_{\alpha\beta\pi},\quad \Theta_{\alpha\beta\varrho},\quad \Theta_{\alpha\beta\sigma},\quad \Theta_{\alpha\beta\pi\varrho\sigma} \qquad (\alpha\beta = 12, 13, \ldots 56)$$

zu bezeichnen. Es ist jetzt leicht, für jede einzelne die vier oder sechs Nullperioden anzugeben, die sie mit Θ_π und Θ_ϱ gemeinsam hat. Sie können nur in der Reihe:

$$1,\quad 2,\quad \ldots\quad 6,\quad 1\pi\varrho,\quad 2\pi\varrho,\quad \ldots\quad 6\pi\varrho$$

enthalten sein. Zu Θ_σ gehört die Reihe 1, 2, ... 6; daher sind:

$$\Theta_{1\pi},\quad \Theta_{2\pi},\quad \ldots\quad \Theta_{6\pi},$$
$$\Theta_{1\varrho},\quad \Theta_{2\varrho},\quad \ldots\quad \Theta_{6\varrho},$$
$$\Theta_{1\sigma},\quad \Theta_{2\sigma},\quad \ldots\quad \Theta_{6\sigma}$$

ungerade. Weil ferner diese Reihen azygetisch sind, so sind:

$$\Theta_{123\pi},\quad \Theta_{124\pi},\quad \ldots,$$
$$\Theta_{123\varrho},\quad \ldots,$$
$$\Theta_{123\sigma},\quad \ldots$$

gerade. Endlich, da Θ_π, Θ_ϱ, Θ_σ azygetisch sind, so haben die Producte:

$$\Theta_{1\pi}\Theta_{1\varrho}\Theta_{1\sigma}\Theta_{1\pi\varrho\sigma},$$
$$\Theta_{123\pi}\Theta_{123\varrho}\Theta_{123\sigma}\Theta_{123\pi\varrho\sigma}$$

ungeraden Charakter, und deshalb ist $\Theta_{1\pi\varrho\sigma}$ gerade, $\Theta_{123\pi\varrho\sigma}$ dagegen unge-

rade. Ungerade sind also:

$$\Theta_{a\pi}, \quad \Theta_{a\varrho}, \quad \Theta_{a\sigma}, \quad \Theta_{a\beta\gamma\pi\varrho\sigma};$$

gerade hingegen:

$$\Theta_{a\beta\gamma\pi}, \quad \Theta_{a\beta\gamma\varrho}, \quad \Theta_{a\beta\gamma\sigma}, \quad \Theta_{a\pi\varrho\sigma},$$

wenn wir unter α irgend einen der Indices 1, 2, ... 6, unter $\alpha\beta\gamma$ irgend eine Combination von drei verschiedenen dieser Zahlen verstehen.

So ergiebt sich, dass

$$\begin{array}{rlll}
\Theta_\sigma & \text{die Nullperioden} & 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 6, \\
\Theta_{\pi\varrho\sigma} & \text{"} \quad\quad \text{"} & 1\pi\varrho,\ 2\pi\varrho,\ \ldots\ 6\pi\varrho, \\
\Theta_{12\sigma} & \text{"} \quad\quad \text{"} & 1,\ 2,\ 3\pi\varrho,\ 4\pi\varrho,\ \ldots\ 6\pi\varrho, \\
\Theta_{12\pi\varrho\sigma} & \text{"} \quad\quad \text{"} & 1\pi\varrho,\ 2\pi\varrho,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \\
\Theta_{12\pi} \text{ und } \Theta_{12\varrho} & \text{"} \quad\quad \text{"} & 1,\ 2,\ 1\pi\varrho,\ 2\pi\varrho
\end{array}$$

mit Θ_π und Θ_ϱ gemeinsam hat. Die 30 Grössen $\Theta_{a\beta\pi}$, $\Theta_{a\beta\varrho}$ bilden deshalb die Gruppe derer, die zu Θ_π, Θ_ϱ syzygetisch sind.

Nehmen wir z. B. die dritte Reihe; so geht durch diese

$$\Theta_{12\sigma} \text{ in } \Theta_{2\sigma}, \quad \Theta_{1\sigma}, \quad \Theta_{123\pi\varrho\sigma}, \quad \Theta_{124\pi\varrho\sigma}, \quad \ldots \quad \Theta_{126\pi\varrho\sigma}$$

über, Functionen, die sämmtlich ungerade sind.

Setzt man eine der 12 halben Perioden für die Argumente ein, so wird $\Theta_\pi = 0$, $\Theta_\varrho = 0$. Deshalb muss jeder ein besonderer Congruenzwerth der Hülfsgrösse w entsprechen. Wir bezeichnen diese Werthe

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots \quad a_6, \quad a_{1\pi\varrho}, \quad \ldots \quad a_{6\pi\varrho}$$

durch dieselben Indices, wie die zugehörigen halben Perioden. Dann wird:

$$\begin{array}{rll}
A_\sigma(w) = 0 & \text{für} & w = a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_6, \\
A_{\pi\varrho\sigma}(w) = 0 & \text{für} & w = a_{1\pi\varrho},\ \ldots\ a_{6\pi\varrho}, \\
A_{12\sigma}(w) = 0 & \text{für} & w = a_1,\ a_2,\ a_{3\pi\varrho},\ \ldots\ a_{6\pi\varrho}, \\
A_{12\pi\varrho\sigma}(w) = 0 & \text{für} & w = a_{1\pi\varrho},\ a_{2\pi\varrho},\ a_3,\ \ldots\ a_6, \\
A_{12\pi}(w) \text{ und } A_{12\varrho}(w) = 0 & \text{für} & w = a_1,\ a_2,\ a_{1\pi\varrho},\ a_{2\pi\varrho}.
\end{array}$$

Für die Grössen $A_m(w)$ der azygetischen Gruppe sind hierdurch die Nullpunkte vollständig gegeben, für die der andern Gruppe dagegen nicht.

Nun muss aber der Quotient je zweier $A_m(w)$ eine elliptische Function von w sein, und deshalb die Summe der sechs Nullwerthe für jedes $A_m(w)$ denselben, von dem Index m unabhängigen Congruenzwerth haben. Vergleicht man in dieser Hinsicht die Nullpunkte von $A_{\pi\varrho\sigma}$ und $A_{12\sigma}$, so

ergiebt sich, da die Punkte $a_{3\pi\varrho}$, $a_{4\pi\varrho}$, $a_{5\pi\varrho}$, $a_{6\pi\varrho}$ beiden gemeinsam sind:

$$a_{1\pi\varrho}+a_{2\pi\varrho} \equiv a_1+a_2.$$

Ebenso ist:

$$a_{1\pi\varrho}+a_{3\pi\varrho} \equiv a_1+a_3,$$
$$a_{2\pi\varrho}+a_{3\pi\varrho} \equiv a_2+a_3;$$

folglich:

$$2a_{1\pi\varrho} \equiv 2a_1,$$
$$a_{1\pi\varrho}-a_1 \equiv a_{2\pi\varrho}-a_2.$$

Es haben demnach die sechs Differenzen $a_{\alpha\pi\varrho}-a_\alpha$ denselben Congruenzwerth, und dieser Werth ist eine halbe Periode, die ω genannt werden möge. Congruent 0 oder eine ganze Periode kann ω nicht sein, da $a_{\alpha\pi\varrho}$ nothwendig von a_α verschieden ist. Statt $a_{\alpha\pi\varrho}$ dürfen wir jetzt $a_\alpha+\omega$ setzen.

Nun sei $f(w)$ die ungerade elliptische Thetafunction ersten Grades, und $g(w)$ diejenige gerade, die aus $f(w)$ entspringt, indem man w um ω vermehrt. Dann ist

$$A_\sigma(w) = C_\sigma f(w-a_1)f(w-a_2)\dots f(w-a_6),$$

und die übrigen Grössen $A_{\pi\varrho\sigma}$, $A_{\alpha\beta\sigma}$, $A_{\alpha\beta\pi\varrho\sigma}$ der azygetischen Gruppe entspringen hieraus, indem man bei einer geraden Anzahl von Factoren dieses Products das Functionszeichen f durch g ersetzt; abgesehen davon, dass der constante Factor C_σ sich ebenfalls ändert. Für das System dieser 32 Functionen stellen wir demnach die Formen auf:

$$\begin{aligned}
A_\sigma(w) &= C_\sigma f(w-a_1)f(w-a_2)\dots f(w-a_6),\\
A_{\pi\varrho\sigma}(w) &= C_{\pi\varrho\sigma} g(w-a_1)g(w-a_2)\dots g(w-a_6),\\
A_{\alpha\beta\sigma}(w) &= C_{\alpha\beta\sigma} f(w-a_\alpha)f(w-a_\beta)g(w-a_\varkappa)g(w-a_\lambda)\dots,\\
A_{\alpha\beta\pi\varrho\sigma}(w) &= C_{\alpha\beta\pi\varrho\sigma} g(w-a_\alpha)g(w-a_\beta)f(w-a_\varkappa)\dots,
\end{aligned}$$

wo $\varkappa$, λ, ... die vier von α, β verschiedenen Indices der Reihe 1 bis 6 bedeuten.

Wir können jetzt auch eine ungerade *Abel*sche Function durch w ausdrücken. Eine solche ist

$$y = \frac{\Theta_{12\sigma}\Theta_{13\sigma}}{\Theta_{23\sigma}\Theta_\sigma},$$

denn sie geht aus der offenbar ungeraden:

$$\frac{\Theta_{2\sigma}\Theta_{3\sigma}}{\Theta_{123\sigma}\Theta_{1\sigma}}$$

hervor, indem man die Argumente um eine halbe Periode vermehrt. Hier ergiebt sich:

$$y = \frac{\sqrt{A_{12\sigma}}\sqrt{A_{13\sigma}}}{\sqrt{A_{23\sigma}}\sqrt{A_\sigma}} = \text{Const.}\sqrt{\frac{f(w-a_1)g(w-a_2)\dots g(w-a_6)}{g(w-a_1)f(w-a_2)\dots f(w-a_6)}}$$

oder, wenn wir:

$$\frac{f(w)}{g(w)} = e(w)$$

setzen:

$$y = \text{Const.}\sqrt{\frac{e(w-a_1)}{e(w-a_2)e(w-a_3)\dots e(w-a_6)}}.$$

Nun wird jede beliebige *Abel*sche Function in der Form $\lambda(w)+\mu(w)y$ darstellbar sein, wo λ und μ elliptische Functionen bedeuten. Da aber:

$$\frac{\Theta_{\pi\varrho\sigma}}{\Theta_\sigma} = \sqrt{\frac{A_{\pi\varrho\sigma}}{A_\sigma}} = \frac{\text{Const.}}{\sqrt{e(w-a_1)e(w-a_2)\dots e(w-a_6)}}$$

ist, so folgt:

$$\frac{\Theta_{\pi\varrho\sigma}}{\Theta_\sigma} = \text{Const.}\frac{y}{e(w-a_1)}.$$

Dieser Quotient ist also das Product von y mit einer eindeutigen Function von w.

Die letzte Bemerkung dient dazu, um jetzt auch die Nullpunkte der 30 noch übrigen Functionen $A_{\alpha\beta\pi}$ und $A_{\alpha\beta\varrho}$ vollständig zu bestimmen. Der Quotient:

$$\frac{A_{\alpha\beta\pi}(w)}{A_{\alpha\beta\varrho}(w)} = \Phi_{\alpha\beta}(w)$$

ist eine elliptische Function zweiten Grades, da Zähler und Nenner vier Nullpunkte gemeinsam haben. Diese ist aber das Quadrat einer eindeutigen Function. Denn

$$\frac{\Theta_{\alpha\beta\pi}}{\Theta_{\alpha\beta\varrho}}\cdot\frac{\Theta_{\pi\varrho\sigma}}{\Theta_\sigma}$$

ist eine *Abel*sche Function, und zwar eine ungerade, da sie aus

$$\frac{\Theta_{\alpha\pi}}{\Theta_{\alpha\varrho}}\,\frac{\Theta_{\beta\pi\varrho\sigma}}{\Theta_{\beta\sigma}}$$

durch Vermehrung der Argumente um eine halbe Periode entspringt. Sie ist deshalb darstellbar als Product von y mit einer elliptischen Function von w. Weil aber andererseits

$$\frac{\Theta_{\alpha\beta\pi}}{\Theta_{\alpha\beta\varrho}} = \sqrt{\Phi_{\alpha\beta}(w)}, \quad \frac{\Theta_{\pi\varrho\sigma}}{\Theta_\sigma} = \text{Const.}\frac{y}{e(w-a_1)}$$

die Formen feststellen:

$$A_{\alpha\beta\pi}(w) = C_{\alpha\beta\pi} h(w-a_\alpha)h(w-a_\beta)f^2(w+a_\alpha+a_\beta),$$
$$A_{\alpha\beta\varrho}(w) = C_{\alpha\beta\varrho} h(w-a_\alpha)h(w-a_\beta)g^2(w+a_\alpha+a_\beta),$$

wo wir für das Product $f(w)g(w)$ das Functionszeichen $h(w)$ eingeführt haben.

Man könnte noch fordern, dass die constanten Factoren C_σ, $C_{\pi\varrho\sigma}$, $C_{\alpha\beta\pi}$, $C_{\alpha\beta\varrho}$, $C_{\alpha\beta\sigma}$, $C_{\alpha\beta\pi\varrho\sigma}$, sowie die Nullwerthe der geraden Theta $c_{\alpha\pi\varrho\sigma}$, $c_{\alpha\beta\gamma\pi}$, $c_{\alpha\beta\gamma\varrho}$, $c_{\alpha\beta\gamma\sigma}$ als Functionen der Parameter a_α dargestellt werden. Hierfür existirt eine sehr einfache Methode, die ich indess nur andeuten will. Es wird der Werth

$$\pm \frac{c^2_{\alpha\pi\varrho\sigma}}{c^2_{\beta\pi\varrho\sigma}}$$

gewonnen, indem man in

$$\frac{\Theta^2_{\alpha\beta\pi\varrho\sigma}}{\Theta^2_{\pi\varrho\sigma}}$$

für die Argumente die halbe Periode β einsetzt. Daher ist:

$$\pm \frac{c^2_{\alpha\pi\varrho\sigma}}{c^2_{\beta\pi\varrho\sigma}} = \frac{A_{\alpha\beta\pi\varrho\sigma}(a_\beta)}{A_{\pi\varrho\sigma}(a_\beta)},$$

und wenn wir hier für $A_{\pi\varrho\sigma}$ und $A_{\alpha\beta\pi\varrho\sigma}$ die gegebenen Ausdrücke einführen, so ergiebt sich:

$$\pm \frac{c^2_{\alpha\pi\varrho\sigma}}{c^2_{\beta\pi\varrho\sigma}} = \frac{C_{\alpha\beta\pi\varrho\sigma}}{C_{\pi\varrho\sigma}} e(a_\beta-a_\varkappa)e(a_\beta-a_\lambda)e(a_\beta-a_\mu)e(a_\beta-a_\nu).$$

Dies lässt sich so schreiben:

$$\pm \frac{c^2_{\alpha\pi\varrho\sigma}}{c^2_{\beta\pi\varrho\sigma}} = \frac{C_{\alpha\beta\pi\varrho\sigma}}{C_{\pi\varrho\sigma}} \frac{e_\beta}{e(a_\beta-a_\alpha)},$$

wenn wir unter e_β das Product

$$e_\beta = e(a_\beta-a_\alpha)e(a_\beta-a_\varkappa)\dots e(a_\beta-a_\nu),$$

erstreckt über die fünf von β verschiedenen Zahlen α, $\varkappa$, λ, μ, ν der Reihe 1, 2, ... 6, verstehen. Hieraus folgt aber, da man in der letzten Formel α mit β vertauschen kann:

$$c^4_{\alpha\pi\varrho\sigma} = \pm \frac{k}{e_\alpha},$$

$$C^2_{\alpha\beta\pi\varrho\sigma} = \pm \frac{l}{e_\alpha e_\beta}(e(a_\alpha-a_\beta))^2,$$

wo höchstens die Vorzeichen noch von den Indices abhängen, k und l aber davon unabhängig sind. Aehnliche Ausdrücke lassen sich für die übrigen

der vorkommenden Constanten angeben. Es tritt also auch in dieser Beziehung eine fast genaue Analogie mit den hyperelliptischen Functionen zu Tage.

§ 3.

Nach diesen Vorbemerkungen, die sich auf die Fälle $\varrho = 2$, $\varrho = 3$ beziehen, gehen wir zu den Thetafunctionen von vier Variabeln über. Das allgemeine Problem dieser Functionen ist ein sehr schwieriges. Die nachfolgende Untersuchung beschränkt sich aber auf den Fall, wo zwei Theta in dem System der 256 existiren, deren Entwickelung mit der zweiten Dimension anfängt, und sie setzt nur die quadratischen Thetarelationen als bekannt voraus, die fast unmittelbar aus den Fundamentalsätzen folgen.

Wenn man die 128 Thetaproducte erster Stufe bildet, die zu einer bestimmten halben Periode K gehören: $P_a = \Theta_a \Theta_{aK}$, so sind hiervon 16 linear-unabhängig. Aber sie zerfallen in gerade und ungerade Producte. Betrachtet man nur die geraden, so sind schon je neun durch eine lineare Gleichung verbunden. Es giebt nun unter diesen Gleichungen:

$$A\Theta_a \Theta_{aK} + B\Theta_b \Theta_{bK} + \cdots = 0$$

auch solche, die nur aus sechs Gliedern bestehen. Allerdings müssen dann die sechs Producte in besonderer Weise ausgewählt sein.

Erstens müssen alle zwölf auftretenden Theta entweder selbst gerade sein, oder doch aus geraden entspringen durch Vermehrung der Argumente um eine und dieselbe halbe Periode L. Diejenigen Thetarelationen, die nur gerade Theta enthalten, nennen wir ursprüngliche, die übrigen abgeleitete.

Ferner muss die Reihe der sechs Producte eine azygetische sein. Wenn also $\Theta_a \Theta_{aK}$, $\Theta_b \Theta_{bK}$, $\Theta_c \Theta_{cK}$ drei Glieder der Reihe sind, so müssen die *Abel*schen Functionen:

$$\frac{\Theta_a \Theta_b}{\Theta_c \Theta_{abc}}, \quad \frac{\Theta_{aK} \Theta_{bK}}{\Theta_{ab} \Theta_{abcK}}$$

ungerade sein. In den ursprünglichen Relationen, wo Θ_a, Θ_{aK} etc. gerade Theta bedeuten, ist deshalb Θ_{abc}, Θ_{abcK} ungerade.

Diese Bedingungen sind hinreichend, und man kann den Satz aussprechen: ***Jede Reihe von sechs azygetischen Producten gerader Theta ist durch eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten verbunden.***

Dies ist im Wesentlichen der einzige Satz, auf dem die Untersuchung basirt. Nimmt man ihn an, so hat man sofort die Thetaformeln, die Herr

Noether am Schluss seiner Arbeit: „Zur Theorie der *Abel*schen Functionen von vier Variabeln", Math. Ann. Bd. 14, entwickelt hat. Die erste Kenntniss dieser Formeln erhielt ich, schon vor der *Noether*schen Arbeit, durch Herrn *Weierstrass*.

Es sei:

$$\Theta_a\Theta_{aK}, \quad \Theta_b\Theta_{bK}, \quad \ldots \quad \Theta_f\Theta_{fK}$$

die azygetische Reihe; Θ_a, Θ_{aK} etc. seien gerade, Θ_{abc}, Θ_{abcK} etc. dagegen ungerade. Durch Vermehrung der Argumente um eine willkürliche halbe Periode L entspringt die abgeleitete Reihe

$$\Theta_{aL}, \quad \Theta_{aKL}, \quad \ldots \quad \Theta_{fL}, \quad \Theta_{fKL},$$

und zwischen deren Gliedern bestehe die Gleichung:

$$(1.) \qquad A\Theta_{aL}\Theta_{aKL}+\cdots+E\Theta_{eL}\Theta_{eKL} = F\Theta_{fL}\Theta_{fKL}.$$

Es ist dann leicht, die Coefficienten zu bestimmen. Durch die halbe Periode M geht der Quotient:

$$\frac{\Theta_{aK}\Theta_{aL}}{\Theta_a\Theta_{aKL}} \quad \text{in} \quad (M,\ K,\ L)\frac{\Theta_{aKM}\Theta_{aLM}}{\Theta_{aM}\Theta_{aKLM}}$$

über, wo (M, K, L) ein von den drei Perioden abhängiges Vorzeichen bedeutet, das den Bedingungen genügt:

$$(K,\ L,\ M) = (M,\ K,\ L) = (K,\ M,\ L) \quad \text{etc.},$$
$$(K,\ L,\ MN) = (K,\ L,\ M)(K,\ L,\ N),$$
$$(K,\ L,\ KL) = +1 \quad \text{für syzygetische,}$$
$$= -1 \quad \text{für azygetische Perioden} \quad K,\ L.$$

Hiernach lässt sich die Gleichung (1.), durch Hinzufügung der halben Periode afL zu den Argumenten, überführen in:

$$(afL,\ af,\ afK)A\Theta_f\Theta_{fK}+(afL,\ bf,\ bfK)B\Theta_{abf}\Theta_{abfK}+\cdots = F\Theta_a\Theta_{aK}.$$

Setzen wir jetzt die Argumente gleich 0, und bezeichnen, wie gewöhnlich, den Werth, auf den sich dadurch ein gerades Θ_m reducirt, mit c_m, so folgt:

$$(af,\ afK,\ afL)Ac_fc_{fK} = Fc_ac_{aK}.$$

Man darf also setzen:

$$F = c_fc_{fK},$$
$$A = (af,\ afK,\ afL)c_ac_{aK}, \quad B = (bf,\ bfK,\ bfL)c_bc_{bK}, \quad \text{etc.},$$

und erhält so die vollständig entwickelte Gleichung:

$$(2.) \quad (af, afK, afL)c_ac_{aK}\Theta_{aL}\Theta_{aKL}+\cdots+(ef, efK, efL)c_ec_{eK}\Theta_{eL}\Theta_{eKL} = c_fc_{fK}\Theta_{fL}\Theta_{fKL}.$$

Die drei Perioden, von denen das Vorzeichen des hingeschriebenen Gliedes auf der linken Seite abhängt, entspringen, indem man den ersten Index f des Products $c_f c_{fK} \Theta_{fL} \Theta_{fKL}$ mit den drei ersten von $c_a c_{aK} \Theta_{aL} \Theta_{aKL}$ combinirt.

Man kann die halbe Periode L so wählen, dass zwei Glieder dieser Gleichung, z. B.:

$$\Theta_{dL}\Theta_{dKL}, \quad \Theta_{eL}\Theta_{eKL}$$

Producte ungerader Theta werden, die übrigen dagegen nur gerade Theta enthalten. Setzt man dann die Argumente gleich 0, so folgt die viergliedrige Constanten-Relation:

$$(af;\ afK,\ afL) c_a c_{aK} c_{aL} c_{aKL} + \cdots = c_f c_{fK} c_{fL} c_{fKL}.$$

Diese Formel lässt sich auch für sich auffassen, ohne Rücksicht auf die Thetarelation, aus der sie entstanden ist, und sie repräsentirt dann vielleicht eins der interessantesten Gleichungssysteme, die existiren. Die Perioden: 0, K, L, KL bilden eine syzygetische Gruppe. Für eine solche giebt es immer 10 Constanten zweiter Stufe: $q_m = c_m c_{mK} c_{mL} c_{mKL}$, und aus diesem System von 10 Constanten lassen sich auf 15 Arten je vier: q_k, q_l, q_m, q_n, auswählen, die eine azygetische Reihe bilden (sodass klm, kln, kmn, lmn Indices ungerader Theta sind). *Jede solche azygetische Reihe von vier Constanten zweiter Stufe ist durch eine lineare Relation verbunden, deren Coefficienten* ± 1 *sind:*

$$(3.) \qquad (kn)q_k + (ln)q_l + (mn)q_m = q_n.$$

Hier ist zur Abkürzung (m) für das Symbol (m, mK, mL) gesetzt. Auf dieser allgemeinen Formel beruht die algebraische Untersuchung, die in diesem ersten Abschnitt durchgeführt wird.

Die entwickelten Formeln (2.), (3.) und die Eigenschaften des Vorzeichens (K, L, M) gelten, wenn man die einzelnen Theta durch die Reihen:

$$\Theta(u, u', \ldots; \tfrac{1}{2}\delta, \tfrac{1}{2}\varepsilon)$$

definirt und hierbei unter jedem δ den Werth 0 oder -1, unter jedem ε 0 oder $+1$ versteht. (K, L, M) ist dann eine Potenz von -1, deren Exponent durch die Summe gegeben wird:

$$\sum_a (\overset{K}{\varepsilon}_a \overset{L}{\delta}_a \overset{M}{\delta}_a + \overset{L}{\varepsilon}_a \overset{M}{\delta}_a \overset{K}{\delta}_a + \overset{M}{\varepsilon}_a \overset{K}{\delta}_a \overset{L}{\delta}_a).$$

Wenn wir aber mehr Rücksicht nehmen auf das algebraische Problem, als auf die Reihendarstellung der Functionen, so können wir, mit einer leichten Abänderung in der Definition der Theta, das Vorzeichen

(K, L, M) auch anders definiren*). Wesentlich ist nur, dass die Eigenschaften des Zeichens bestehen bleiben. Wir denken uns eine Fundamentalreihe von 2ϱ — also in unserm Falle von 8 — halben Perioden:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 8$$

gegeben, die zu je zweien azygetisch sind. Wir führen dann willkürlich fixirte alternirende Vorzeichen ein:

$$(\alpha|\beta) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 8;\ \alpha \lessgtr \beta),$$

sodass stets:

$$(\alpha|\beta)(\beta|\alpha) = -1$$

ist. Ferner sei $(\alpha|\alpha)$ definirt durch die Bedingung:

$$(4.) \qquad (1|\alpha)(2|\alpha)\ldots(\alpha|\alpha)\ldots(8|\alpha) = 1 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots 8),$$

und wir erweitern jetzt die Definition von $(\alpha|\beta)$, indem wir, wenn K, L beliebige Combinationen der Zahlen 1 bis 8 bedeuten, unter $(K|L)$ das Doppelproduct

$$(5.) \qquad (K|L) = \prod_{\varkappa}\prod_{\lambda}(\varkappa|\lambda)$$

verstehen, erstreckt über alle Elemente $\varkappa$ von K und λ von L. Das Zeichen $\widehat{K, L}$ bedeute den gemeinsamen Theiler von K und L, d. h. die Combination derjenigen Elemente, die K und L gemeinsam sind. Dann dürfen wir das Symbol (K, L, M) so definiren:

$$(6.) \qquad (K, L, M) = (K|\widehat{L, M}).(L|\widehat{M, K}).(M|\widehat{K, L}).$$

Der Ausdruck ist hiernach als Product alternirender Vorzeichen aufzufassen.

Wir fügen noch einen Zusatz hinzu, der die Zerlegung erleichtert. Für die Combination aller acht primitiven Indices möge ein besonderes Zeichen π gewählt werden:

$$123\ldots8 = \pi.$$

Die Gleichung (4.) lässt sich dann einfacher so darstellen:

$$(\pi|\alpha) = 1,$$

und hieraus folgt sofort, dass auch für eine beliebige Combination K:

$$(\pi|K) = 1$$

ist. Nehmen wir nun in dem Symbol (K, L, M) die eine der drei Perioden, etwa M, gleich π an, so wird, der letzten Formel zufolge, $(M|\widehat{K, L})$ gleich

*) Vgl. Zur Definition des Systems der 4^ϱ Thetafunctionen. Dieses Journal Bd. 107.

$+1$, während $\widehat{L, M}$ in $L, \widehat{M, K}$ in K übergeht. Denn offenbar ist L selbst der gemeinsame Theiler von L und π. Daher ist:

$$(K, L, \pi) = (K|L)(L|K);$$

also:

$$(K, L, \pi) = +1 \quad \text{oder} \quad -1,$$

je nachdem die Perioden K, L syzygetisch oder azygetisch sind.

Eine Folge hiervon ist, dass $(K, L, M\pi)$ den gleichen Werth hat wie (K, L, M) oder den entgegengesetzten, je nachdem der eine oder der andere Fall eintrifft, je nachdem also die Producte $\Theta_a\Theta_{aK}\Theta_{aL}\Theta_{aKL}$ gerade oder ungerade sind.

Hiernach können wir, wenn M eine Combination von höherer als der vierten Ordnung ist, diese in dem Zeichen (K, L, M) ersetzen durch die complementäre $M\pi$, die dann von niedrigerer Ordnung ist. Dasselbe gilt von K und L; es lässt sich also durch eine erste Reduction bewirken, dass keine Combination vorkommt, die mehr als vier Elemente enthält. Dann werden gemeinsame Elemente nur in geringer Zahl vorhanden sein, was natürlich die weitere Zerlegung sehr vereinfacht.

Wir legen der Rechnung, die eigentlich eine umfangreiche Elimination ist, zu Grunde eine azygetische Reihe von 10 geraden Thetafunctionen. Eine derselben lassen wir ohne Index; acht anderen geben wir die Indices 1, 2, ... 8, und wir verstehen unter α gleichzeitig die halbe Periode, durch die Θ_α aus Θ hervorgeht. Die zehnte Function ist dann:

$$\Theta_{123\ldots8} = \Theta_\pi,$$

und es bilden die halben Perioden 1 bis 8 (denen auch noch ihre Summe π hinzugefügt werden könnte) eine azygetische Reihe, so wie wir es bei der Fixirung des Zeichens (K, L, M) vorausgesetzt haben.

Die Untersuchung der Relationen zwischen den Grössen c_m soll hier nicht in dem allgemeinen Falle durchgeführt werden, sondern es soll nur der specielle Fall behandelt werden, wo vermöge der besonderen Beschaffenheit der Parameter die beiden Constanten c und c_π verschwinden.

Dies ist nicht der hyperelliptische Fall. Den letzteren würden wir erst dann erhalten, wenn wir als dritte Beschränkung noch die Gleichung $J = 0$ hinzufügten, die nothwendig ist, wenn die *Abel*schen Functionen von vier Variabeln der *Riemann*schen Theorie angehören sollen. Die Gleichung $J = 0$ kann als Beziehung zwischen je drei Constanten dritter Stufe ge-

schrieben werden: $\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}=0$; und wenn wir diese noch hinzunähmen, so würde allerdings folgen, dass gleichzeitig mit c und c_π noch eine Reihe anderer Constanten c_m verschwinden muss; was bekannt ist.

Durch die Bedingungen $c=0$, $c_\pi=0$ ist nur gesagt, dass irgend zwei gerade Theta in dem System existiren sollen, die gleichzeitig mit den Argumenten verschwinden. Denn die Fundamentalreihe lässt sich immer so wählen, dass zwei vorgeschriebene gerade Theta in ihr enthalten sind.

Sämmtliche 256 Functionen sind jetzt durch bestimmte Combinationen der Zahlen 1 bis 8 bezeichnet. Die Anzahl der Elemente einer Combination nennen wir ihre Ordnung, oder auch die Ordnung der entsprechenden Function. Gerade sind dann alle Theta, deren Ordnung congruent 0 oder 1 modulo 4 ist, ungerade die übrigen. Wir nennen ferner zwei Functionen zugeordnet, deren Indices complementär sind. Ist die eine Θ_m, so kann die andere als $\Theta_{m\pi}$ bezeichnet werden.

Es sei M die Ordnungszahl irgend einer Combination m. Dann ist $8-M$ die Ordnungszahl des complementären Index $m\pi$. Es ist aber $8-M\equiv M$ oder $M+2$ modulo 4, je nachdem M gerade oder ungerade ist; mithin ist das Product $\Theta_m\Theta_{m\pi}$ eine gerade oder ungerade Function der Argumente, je nachdem $M\equiv 0$ oder 1 modulo 2 ist. Hieraus folgt, dass alle Functionen Θ_m von gerader Ordnung sich syzygetisch, die von ungerader Ordnung sich azygetisch zu den beiden ausgezeichneten Functionen Θ, Θ_π verhalten. So sind Θ_{12} und $\Theta_{12\pi}$ ungerade, und Θ_{1234}, $\Theta_{1234\pi}$ gerade. Dagegen ist Θ_1 gerade, $\Theta_{1\pi}$ ungerade; Θ_{678} ungerade, $\Theta_{678\pi}$ gerade.

Von den Constanten c_m sind hiernach nur die mit ein-, vier- und fünffachem Index von 0 verschieden, und zwar scheiden sie sich in zwei Systeme: Die Grössen $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ verhalten sich syzygetisch zu c und c_π, c_α und $c_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}=c_{\varkappa\lambda\mu\pi}$ dagegen azygetisch. Denn wenn wir auch c und c_π gleich 0 gesetzt haben, so sind doch diese beiden Grössen in Fragen der Gruppirung als vorhanden zu betrachten.

§ 4.

Wir beschäftigen uns vorläufig mit den Relationen unter den Constanten. Sie haben alle dieselbe Form:

$$(1.)\qquad (kn)q_k+(ln)q_l+(mn)q_m = q_n.$$

Es treten aber doch insofern Unterschiede auf, als nach unseren Vor-

aussetzungen c und $c_\pi = 0$ ist und deshalb ein oder auch zwei Glieder der Gleichung fortfallen können. Die einfachsten Gleichungen sind natürlich die zweigliedrigen. Nehmen wir etwa an, dass $k = 0$, $l = \pi$ ist, dass also q_k den Factor c, q_l den Factor c_π enthält, so reducirt sich die Gleichung (1.) auf $q_m = (mn)q_n$, oder:

$$(2.)\qquad c_m c_{mK} c_{mL} c_{mKL} = (mn,\ mnK,\ mnL) c_n c_{nK} c_{nL} c_{nKL}.$$

In diesen Gleichungen kommen aber nur diejenigen c vor, deren Indices ein- oder fünfgliedrig sind. Nehmen wir z. B.

$$K = 5678,\quad L = 3478,\quad KL = 3456;$$
$$k = 0,\quad l = \pi,\quad m = 1,\quad n = 2,$$

so erhalten wir:

$$q_k = c\ c_{5678}\ c_{3478}\ c_{3456} = 0,$$
$$q_l = c_\pi c_{1234}\ c_{1256}\ c_{1278} = 0,$$
$$q_m = c_1\ c_{15678} c_{13478} c_{13456},$$
$$q_n = c_2\ c_{25678} c_{23478} c_{23456},$$

und es kann sich, der Relation (1.) oder (2.) zufolge, q_m von q_n nur um das Vorzeichen (mn) unterscheiden. Dieses Vorzeichen:

$$(mn) = (mn,\ mnK,\ mnL) = (12,\ 34\pi,\ 56\pi)$$

hat aber, wie man leicht sieht, den Werth $+1$.

Denn es ist

$$(12,\ 34\pi,\ 56\pi) = (12,\ 34\pi,\ 56),$$

weil das Product $\Theta\Theta_{12}\Theta_{34\pi}\Theta_{1234\pi}$ gerade ist, also die Perioden 12, 34π ein syzygetisches Paar bilden, und:

$$(12,\ 34\pi,\ 56) = (12,\ 34,\ 56),$$

weil $\Theta\Theta_{12}\Theta_{56}\Theta_{1256}$ ebenfalls gerade ist. In dem letzteren Ausdruck aber haben die drei Combinationen gar keine gemeinsamen Elemente. Folglich erhalten wir aus (2.):

$$c_1 c_{15678} c_{13478} c_{13456} = c_2 c_{25678} c_{23478} c_{23456},$$

oder:

$$(3.)\qquad c_1 c_{234\pi} c_{256\pi} c_{278\pi} = c_2 c_{134\pi} c_{156\pi} c_{178\pi}.$$

Dies ist eine Gleichung von der Art, wie sie auch bei den hyperelliptischen Functionen auftritt, und es lässt sich auch eine ganz analoge Folgerung ziehen. Wir setzen allgemein:

$$\frac{c_{\alpha\beta\gamma\pi}}{c_\alpha c_\beta c_\gamma} = r p_{\alpha\beta\gamma},$$

wo r einen Factor bedeutet, den wir zunächst willkürlich lassen und erst später fixiren. Dadurch ergiebt sich statt (3.):

$$(4.)\qquad c_1^2 p_{134} p_{156} p_{178} = c_2^2 p_{234} p_{256} p_{278}.$$

Die einzelnen primitiven Indices können wir, in Folge der Symmetrie unserer Voraussetzungen, in jeder Formel, die wir ableiten, vertauschen. Es ist also auch:

$$c_1^2 p_{154} p_{136} p_{178} = c_2^2 p_{254} p_{236} p_{278},$$

mithin:

$$\frac{p_{134} p_{156}}{p_{154} p_{136}} = \frac{p_{234} p_{256}}{p_{154} p_{136}}.$$

Wenn aber zwischen einer Anzahl von Grössen, welche durch die dreigliedrigen Combinationen der Zahlen 1, 2, ... n bezeichnet sind, eine solche Gleichung besteht und richtig bleibt bei jeder Vertauschung der primitiven Indices, so folgt hieraus, dass allgemein

$$(5.)\qquad p_{\alpha\beta\gamma} = q_{\alpha\beta} q_{\alpha\gamma} q_{\beta\gamma}$$

gesetzt werden kann. Die einzelnen Factoren $q_{\alpha\beta} = q_{\beta\alpha}$ sind allerdings nicht eindeutig bestimmt, wenn die $p_{\alpha\beta\gamma}$ gegeben sind; denn man kann allgemein $q_{\alpha\beta}$ durch $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta q_{\alpha\beta}$ ersetzen, wo ε_α, ε_β willkürlich gewählte Vorzeichen bedeuten, ohne dass die Gleichung (5.) zu bestehen aufhört.

Ebenso würde, wenn eine durch zweifache Indices bezeichnete Grössenreihe

$$p_{12},\quad p_{13},\quad p_{23},\quad \dots$$

gegeben wäre, für die allgemein die Formel besteht:

$$\frac{p_{\alpha\varkappa}}{p_{\alpha\lambda}} = \frac{p_{\beta\varkappa}}{p_{\beta\lambda}},$$

folgen, dass man $p_{\alpha\beta} = q_\alpha q_\beta$ setzen darf. Beide Sätze sind leicht durch den Schluss von n auf $n+1$ zu beweisen.

Wir setzen deshalb jetzt:

$$(6.)\qquad c_{\alpha\beta\gamma\pi} = r c_\alpha c_\beta c_\gamma q_{\alpha\beta} q_{\alpha\gamma} q_{\beta\gamma}.$$

Dadurch geht auch die Formel (4.) in eine einfachere über:

$$(7.)\qquad c_1^2 q_1 = c_2^2 q_2.$$

Hier bedeutet q_1 das Product

$$q_1 = q_{12} q_{13} \cdots q_{18},$$

und allgemein q_α das Product der sieben Factoren $q_{\alpha\beta}$, deren Index das Element α besitzt. Das Product aller 28 Factoren $q_{\alpha\beta}$ überhaupt nennen wir q.

Der Werth von $c_\alpha^2 q_\alpha$ ist demnach von dem Index α unabhängig. Die Quadratwurzel dieses Werthes, mit beliebig fixirtem Vorzeichen, nennen wir k. Dann dürfen wir setzen:

$$(8.)\quad \begin{cases} c_\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{q_\alpha}}, \\ c_{\alpha\beta\gamma\pi} = \dfrac{l q_{\alpha\beta} q_{\alpha\gamma} q_{\beta\gamma}}{\sqrt{q_\alpha}\sqrt{q_\beta}\sqrt{q_\gamma}}, \end{cases}$$

sodass, bis auf die beiden Factoren k und l, sämmtliche c_m der azygetischen Gruppe durch die 28 Grössen $q_{\alpha\beta}$ ausgedrückt sind.

Wir wollen für die Grössen q, die dem Vorzeichen nach zum Theil willkürlich sind, noch eine nähere Bestimmung hinzufügen. Es ist

$$q_1 q_2 \dots q_8 = q^2,$$

weil jedes $q_{\alpha\beta}$ sowohl in q_α als in q_β als Factor auftritt. Wir können aber auch:

$$(9.)\quad \sqrt{q_1}\sqrt{q_2}\dots\sqrt{q_8} = q$$

annehmen. Denn vorausgesetzt, das Product wäre $-q$, so setzen wir $q_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta q'_{\alpha\beta}$, und wählen die Vorzeichen $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_8$ so, dass ihr Product -1 ist. Dadurch wird, wenn wir q'_α und q' ebenso definiren, wie vorhin q_α und q:

$$q'_\alpha = -q_\alpha, \quad q' = -q,$$

und wenn wir nun $\sqrt{q'_\alpha} = i\sqrt{q_\alpha}$ einführen, so folgt, dass erstens:

$$\sqrt{q'_1}\dots\sqrt{q'_8} = +q',$$

zweitens:

$$c_\alpha = \frac{ik}{\sqrt{q_\alpha}}, \quad c_{\alpha\beta\gamma\pi} = \frac{-il q'_{\alpha\beta} q'_{\alpha\gamma} q'_{\beta\gamma}}{\sqrt{q'_\alpha}\sqrt{q'_\beta}\sqrt{q'_\gamma}}$$

ist. Dies sind aber im wesentlichen dieselben Formeln wie vorhin.

Wir wollen allgemein, wenn a eine beliebige Combination ist, unter φ_a den Ausdruck:

$$\varphi_a = \frac{\Pi(q_{\alpha\alpha'})}{\Pi(\sqrt{q_\alpha})}$$

verstehen, wo das Product im Nenner sich erstreckt über alle Elemente von a, das im Zähler über alle zweigliedrigen Combinationen, die sich aus ihnen bilden lassen. Dann ist

$$c_\alpha = k\varphi_\alpha, \quad c_{\alpha\beta\gamma\pi} = l\varphi_{\alpha\beta\gamma}.$$

Es ist aber leicht zu sehen, dass der Ausdruck φ_a ungeändert bleibt, wenn

man a durch die complementäre Combination $b = a\pi$ ersetzt. Denn es sei

$$\varphi_b = \frac{\Pi(q_{\beta\beta'})}{\Pi(\sqrt{q_\beta})},$$

wo jedes β ein in a nicht enthaltenes Element bedeutet. Dann ist offenbar:

$$\Pi(q_a)\Pi(q_{\beta\beta'}) = q.\Pi(q_{aa'}),$$

weil in dem Ausdruck links jeder von den Factoren $q_{12}, q_{13}, \dots q_{78}$ auftritt, aber $q_{aa'}$ doppelt. Da zugleich:

$$q = \Pi(\sqrt{q_a}).\Pi(\sqrt{q_\beta})$$

ist, so folgt:

$$\frac{\Pi(q_{\beta\beta'})}{\Pi(\sqrt{q_\beta})} = \frac{\Pi(q_{aa'})}{\Pi(\sqrt{q_a})},$$

oder $\varphi_a = \varphi_b$. Somit können wir $c_{a\beta\gamma\pi}$ auch in dieser Form darstellen:

$$(10.)\qquad c_{\varkappa\lambda\mu\nu\varrho} = \frac{l q_{\varkappa\lambda} q_{\varkappa\mu} \dots q_{\nu\varrho}}{\sqrt{q_\varkappa}\sqrt{q_\lambda}\dots\sqrt{q_\varrho}}.$$

§ 5.

Eine zweite wichtige Folgerung lässt sich aus einer anderen Relation ziehen. Wir fassen die Gruppe:

$$K = 1234,\quad L = 567\pi,\quad KL = 8$$

ins Auge. Für diese bilden die vier Producte:

$$(1.)\qquad \begin{cases} A = c_{1456}c_{2356}c_{147\pi}c_{237\pi}, \\ B = c_{2456}c_{3156}c_{247\pi}c_{317\pi}, \\ C = c_{3456}c_{1256}c_{347\pi}c_{127\pi}, \\ D = c\,c_{1234}c_{567\pi}c_8 \end{cases}$$

eine azygetische Reihe. D ist unseren Voraussetzungen nach 0; wir erhalten daher:

$$(2.)\qquad \pm A \pm B = C.$$

Das Vorzeichen von A ist bestimmt durch die drei Perioden, die sich ergeben, wenn man den ersten Index von C mit den drei ersten von A, nämlich 3456 mit 1456, 2356 und 147π oder 23568 combinirt. Demnach ist dieses Vorzeichen

$$(13,\ 24,\ 248),$$

und da hier nur die beiden letzten Combinationen einen Theiler 24 gemeinsam haben, so ist das Anfangsglied in der Gleichung (2.):

$$(13|24)A.$$

Ebenso bestimmt sich das zweite Vorzeichen; die Gleichung wird:

$$(13|24)A+(23|14)B = C.$$

Nun vereinfacht sie sich aber schon wesentlich, wenn man für die beiden letzten Factoren in A, B, C ihre Ausdrücke:

$$c_{\alpha\beta\gamma\pi} = \frac{l q_{\alpha\beta} q_{\alpha\gamma} q_{\beta\gamma}}{\sqrt{q_\alpha}\sqrt{q_\beta}\sqrt{q_\gamma}}$$

einführt. Wir bekommen so, mit Hinweglassung überflüssiger Factoren:

$$(13|24)q_{14}q_{23}c_{1456}c_{2356}+(23|14)q_{24}q_{13}c_{2456}c_{1356} = q_{34}q_{12}c_{3456}c_{1256}.$$

Noch einfacher aber wird die Gleichung, wenn wir statt $q_{\alpha\beta}$ die alternirenden Grössen

$$\bar{q}_{\alpha\beta} = (\alpha|\beta)q_{\alpha\beta}$$

einführen, und nun

$$\bar{q}_{\alpha\beta}\bar{q}_{\alpha\gamma}\bar{q}_{\alpha\delta}\bar{q}_{\beta\gamma}\bar{q}_{\beta\delta}\bar{q}_{\gamma\delta}c_{\alpha\beta\gamma\delta} = D_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

setzen. Das $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ist dann selbst ein alternirender Ausdruck, und für diese Grössen bekommen wir die leicht zu deutende Relation:

$$D_{1456}D_{2356}+D_{2456}D_{3156}+D_{3456}D_{1256} = 0.$$

Wenn eine solche Gleichung besteht und richtig bleibt bei jeder Vertauschung der primitiven Indices, so ist es ein algebraischer Satz, dass die einzelnen D sich als viergliedrige Determinanten darstellen lassen:

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{vmatrix} A_\alpha & B_\alpha & C_\alpha & D_\alpha \\ A_\beta & B_\beta & C_\beta & D_\beta \\ A_\gamma & B_\gamma & C_\gamma & D_\gamma \\ A_\delta & B_\delta & C_\delta & D_\delta \end{vmatrix}.$$

Demnach ergiebt sich: Die $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ lassen sich darstellen in der Form:

$$(3.)\qquad c_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{D_{\alpha\beta\gamma\delta}}{\bar{q}_{\alpha\beta}\bar{q}_{\alpha\gamma}\dots\bar{q}_{\gamma\delta}},$$

wo die Zähler Determinanten bedeuten.

Wir fassen dies aber nur als eine Durchgangsform auf. Zum eigentlichen Ausdruck kommen wir, indem wir elliptische Functionen einführen. Betrachten wir für den Augenblick die acht Grössenreihen A_α, B_α, C_α, D_α als homogene Coordinaten von acht Punkten im Raume, so bestimmen diese eine elliptische Curve, den Durchschnitt der beiden Flächen zweiten Grades, die durch diese acht Punkte gelegt werden können. Für diese Curve führen wir ein elliptisches Integral erster Gattung, u, ein, und nennen a_1, a_2, ... a_8

die Werthe von u in den acht Punkten. Ferner sei $f(u)$ die ungerade Thetafunction, die den Parametern der Curve entspricht. Dann sind, wie bekannt, die Determinanten $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$ so darstellbar:

$$mp_\alpha p_\beta p_\gamma p_\delta f(a_\alpha - a_\beta)f(a_\alpha - a_\gamma)\dots f(a_\gamma - a_\delta)f(a_\alpha + a_\beta + a_\gamma + a_\delta),$$

vorausgesetzt, dass man den Anfangspunkt des Integrals u passend wählt.

Um $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ zu erhalten, haben wir dies noch mit den alternirenden Factoren $\bar{q}_{\alpha\beta}, \bar{q}_{\alpha\gamma}, \dots$ zu dividiren. Wir setzen deshalb:

$$\frac{f(a_\alpha - a_\beta)}{\bar{q}_{\alpha\beta}} = r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}.$$

Dadurch wird:

$$(4.)\qquad c_{\alpha\beta\gamma\delta} = mp_\alpha p_\beta p_\gamma p_\delta r_{\alpha\beta} r_{\alpha\gamma}\dots r_{\gamma\delta} f(a_\alpha + a_\beta + a_\gamma + a_\delta),$$

oder, wie wir zusammenfassend schreiben können, indem wir allgemein unter a_n die Summe:

$$\Sigma a_\nu = a_n,$$

erstreckt über die Elemente ν, die in der Combination n enthalten sind, verstehen:

$$c_n = m\Pi(p_\nu)\Pi(r_{\nu\nu'})f(a_n).$$

Das erste Product bezieht sich auf die Elemente von n, das zweite auf ihre zweigliedrigen Combinationen. Diese Formel gilt für alle c der syzygetischen Gruppe. Die Factoren $p_1, p_2, \dots p_8$ sind noch zu bestimmen, einer aber, etwa p_1, kann willkürlich angenommen werden, da wir den Factor m hinzugefügt haben. Die 28 Grössen $r_{12}, r_{13}, \dots r_{78}$ stehen mit den früheren $q_{12}, \dots q_{78}$ durch die Gleichungen:

$$(5.)\qquad q_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta} = (\alpha|\beta) f(a_\alpha - a_\beta)$$

in Verbindung.

§ 6.

Hiermit ist die wesentliche Form der Grössen c_n bereits gefunden:

$$(1.)\qquad \begin{cases} c_\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{q_\alpha}}, \quad c_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = c_{\varkappa\lambda\mu n} = \dfrac{l q_{\varkappa\lambda} q_{\varkappa\mu} q_{\lambda\mu}}{\sqrt{q_\varkappa}\sqrt{q_\lambda}\sqrt{q_\mu}}, \\ c_{\alpha\beta\gamma\delta} = mp_\alpha \dots p_\delta r_{\alpha\beta} \dots r_{\gamma\delta} f(a_{\alpha\beta\gamma\delta}). \end{cases}$$

Es sind aber noch die Grössen $q_{\alpha\beta}, r_{\alpha\beta}, p_\alpha$, ferner k, l und m als Functionen der Parameter a_α zu bestimmen. Ausserdem muss auch noch zwischen den Parametern a_α eine Relation bestehen. Denn die acht Punkte, die im vorigen Paragraphen definirt wurden, sind nicht unabhängig von einander.

Die Art der Abhängigkeit lässt sich so ausdrücken: es muss Flächen vierten Grades geben, die nicht zerfallen und die diese acht Punkte zu Doppelpunkten haben.

Für diese Zwecke wählen wir aus der Menge der Formeln, die zur Verfügung stehen, eine dritte, deren Verwerthung allerdings etwas mehr Rechnung erfordert. Wir nehmen als Basis die Perioden:

$$K = 3456, \quad L = 1256, \quad KL = 1234.$$

Dafür bilden die vier Producte:

$$\begin{aligned} A &= c_{1367}c_{1457}c_{2357}c_{2467}, \\ B &= c_{2367}c_{2457}c_{1357}c_{1467}, \\ C &= c_7 c_{128\pi}c_{348\pi}c_{568\pi}, \\ D &= c\, c_{3456}c_{1256}c_{1234} \end{aligned}$$

wieder eine azygetische Reihe, da die Combination dreier Indices aus verschiedenen Producten stets den Index eines ungeraden Theta hervorbringt. D ist 0; also haben wir:

$$\pm A \pm B = C.$$

Das Vorzeichen von A wird bestimmt, wie im vorigen Fall. Es ist zunächst gegeben durch das Symbol:

$$(136,\ 145,\ 235).$$

Indem man die gemeinsamen Theiler aufsucht, findet man:

$$(136|5)(145|3)(235|1) = (1|2)(3|4)(5|6).$$

Das Vorzeichen von B hat den entgegengesetzten Werth. Die Gleichung lautet demnach:

$$A - B = (1|2)(3|4)(5|6)C.$$

Hier sind nun für die einzelnen c ihre Ausdrücke einzusetzen. Wir nehmen zuerst zwei Factoren von A:

$$\begin{aligned} c_{1367} &= m p_1 p_3 p_6 p_7 r_{13} r_{16} r_{17} r_{36} r_{37} r_{67} f(a_{1367}), \\ c_{1457} &= m p_1 p_4 p_5 p_7 r_{14} r_{15} r_{17} r_{45} r_{47} r_{57} f(a_{1457}). \end{aligned}$$

Das Product aller acht Factoren p_a nennen wir p, und ausserdem definiren wir r_a und r ähnlich, wie früher q_a und q:

$$r_1 = r_{12} \ldots r_{18}; \quad r = r_{12} r_{13} \ldots r_{78}.$$

Dann wird:

$$c_{1367}c_{1457} = m^2 p \frac{p_1 p_7}{p_2 p_8} \cdot \frac{r_1 r_7 r_{36} r_{45}}{r_{12} r_{18} r_{72} r_{78}} f(a_{1367}) f(a_{1457}).$$

Ebenso ist das Product der beiden anderen Factoren von A:

$$c_{2357}c_{2467} = m^2 p \frac{p_2 p_7}{p_1 p_8} \frac{r_2 r_7 r_{35} r_{46}}{r_{21} r_{28} r_{71} r_{78}} f(a_{2357}) f(a_{2467}).$$

Folglich:

$$A = m^4 p^2 \frac{p_7^2}{p_8^2} \cdot \frac{r_1 r_2 r_7^2 r_{35} r_{36} r_{45} r_{46}}{r_{12}^2 r_{17} r_{18} r_{27} r_{28} r_{78}^2} f(a_{1367}) f(a_{1457}) f(a_{2357}) f(a_{2467}).$$

Aber dies lässt sich noch etwas vereinfachen. Nach einer Bemerkung, die schon über die Factoren $q_{\alpha\beta}$ gemacht wurde, ist:

$$\frac{r_1 r_2 r_7 r_8 r_{34} r_{35} r_{36} r_{45} r_{46} r_{56}}{r_{12} r_{17} r_{18} r_{27} r_{28} r_{78}} = r;$$

folglich:

$$(2.) \qquad A = m^4 p^2 r \frac{p_7^2 r_7}{p_8^2 r_8} \frac{f(a_{1367}) f(a_{1457}) f(a_{2357}) f(a_{2467})}{r_{12} r_{34} r_{56} r_{78}}.$$

B entsteht hieraus, indem man die Indices 1, 2 vertauscht. Dadurch ändern sich nur die Argumente der Factoren f. An Stelle von a_{1367}, oder $a_1+a_3+a_6+a_7$, tritt a_{2367}. Nun ist aber, nach dem Additionstheorem der elliptischen Theta:

$$f(a_{1367}) f(a_{1457}) f(a_{2357}) f(a_{2467}) - f(a_{2367}) f(a_{2457}) f(a_{1357}) f(a_{1467})$$
$$= -f(a_1-a_2) f(a_3-a_4) f(a_5-a_6) f(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+2a_7),$$

folglich, da wir a_π für die Summe aller acht Grössen a_α setzen können:

$$A-B = -m^4 p^2 r \frac{p_2^7 r_7}{p_8^2 r_8} \frac{f(a_1-a_2) f(a_3-a_4) f(a_5-a_6) f(a_7-a_8+a_\pi)}{r_{12} r_{34} r_{56} r_{78}}.$$

Der Ausdruck wird weiter reducirt, wenn wir die Formel:

$$f(a_\alpha - a_\beta) = (\alpha|\beta) r_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta}$$

anwenden. Dadurch ergiebt sich:

$$A-B = -(1|2)(3|4)(5|6) m^4 p^2 r \frac{p_7^2 r_7}{p_8^2 r_8} q_{12} q_{34} q_{56} \frac{f(a_7-a_8+a_\pi)}{r_{78}}.$$

Also, wenn wir jetzt die Relation

$$A-B = (1|2)(3|4)(5|6) C$$

zu Hülfe nehmen:

$$c_7 c_{128\pi} c_{348\pi} c_{568\pi} = -m^4 p^2 r \frac{p_7^2 r_7}{p_8^2 r_8} q_{12} q_{34} q_{56} \frac{f(a_7-a_8+a_\pi)}{r_{78}}.$$

Hier kommen links nur die c der anderen Gruppe vor, und es ist:

$$c_7 = \frac{k}{\sqrt{q_7}}, \quad c_{128\pi} = \frac{l q_{12} q_{18} q_{28}}{\sqrt{q_1}\sqrt{q_2}\sqrt{q_8}}, \quad \text{etc.}$$

Berücksichtigt man die Gleichungen:

$$\sqrt{q_1}\sqrt{q_2}\ldots\sqrt{q_8} = q,$$
$$q_{18} q_{28} \cdots q_{78} = q_8,$$

so folgt:

$$c_7 c_{128\pi} c_{348\pi} c_{568\pi} = \frac{kl^2}{q} \frac{q_{12} q_{34} q_{56}}{q_{78}}.$$

So haben wir zwei verschiedene Ausdrücke für das Product der vier c. Wenn wir beide vergleichen, erhalten wir die Endformel:

$$(3.) \qquad \frac{r_{78}}{q_{78}} = -\frac{m^4 p^2 r q}{kl^2} \frac{p_7^2 r_7}{p_8^2 r_8} f(a_7 - a_8 + a_\pi).$$

§ 7.

Um das letzte Resultat bequemer zu verwerthen, führen wir einige Abkürzungen ein, die aber nur vorläufig gelten sollen. Wir setzen:

$$\frac{-m^4 p^2 r q}{kl^2} = n,$$

$$p_a^2 r_a = \varrho_a \qquad (a = 1, 2, \dots 8),$$

$$\frac{r_{\alpha\beta}}{q_{\alpha\beta}} = \chi_{\alpha\beta}.$$

Endlich führen wir, und zwar bleibend, statt a_π das Zeichen s ein für die Summe aller acht Grössen a_a. Die Formel lautet dann:

$$\chi_{78} = n \frac{\varrho_7}{\varrho_8} f(a_7 - a_8 + s).$$

Hieraus ergiebt sich sofort der Schluss, da $\chi_{78} = \chi_{87}$ ist:

$$(1.) \qquad \begin{cases} f(a_6 - a_7 + s) f(a_7 - a_8 + s) f(a_8 - a_6 + s) \\ = f(a_7 - a_6 + s) f(a_8 - a_7 + s) f(a_6 - a_8 + s). \end{cases}$$

Man kann dies als eine Gleichung zur Bestimmung von s ansehen. Sie hat offenbar nur drei incongruente Wurzeln; sie wird aber erfüllt, wenn man für s irgend eine der drei halben Perioden setzt. Folglich muss s eine halbe Periode sein.

Wir können uns die beiden Constanten, die bei der Definition einer elliptischen ungeraden Thetafunction ersten Grades mit gegebenen Perioden noch willkürlich bleiben, so fixirt denken, dass

$$(2.) \qquad f(u+2s) = -f(u), \quad f(s) = 1$$

wird. Dann ist

$$(3.) \qquad f(u+s) = g(u)$$

ein gerades Theta, das für $u = 0$ den Werth 1 hat. Die Function $g(u)$ führen wir dann in die Gleichung (2.) ein:

$$\chi_{78} = n \frac{\varrho_7}{\varrho_8} g(a_7 - a_8).$$

Hier sieht man nun, dass

$$\frac{\varrho_7}{\varrho_6} = \frac{\varrho_8}{\varrho_7}$$

sein muss, also allgemein $\varrho_\alpha^2 = \varrho_\beta^2$. Wir können aber auch $\varrho_\alpha = \varrho_\beta$ annehmen, wodurch wir nur die Congruenzwerthe der einzelnen a_α genauer bestimmen.

Demnach ist der Werth des Products $p_\alpha^2 r_\alpha$ vom Index α unabhängig, und da wir eins der p_α willkürlich wählen dürfen, so setzen wir, vollständig symmetrisch:

$$(4.)\qquad p_\alpha^2 r_\alpha = 1 \qquad (\alpha = 1, 2, \dots 8).$$

Endlich setzen wir auch $n = 1$, wodurch der Werth des Factors r, den wir in § 4 bei der Formel:

$$p_{\alpha\beta\gamma} = r q_{\alpha\beta} q_{\alpha\gamma} q_{\beta\gamma}$$

willkürlich gelassen haben, ein bestimmter wird. Dann ist χ_{78} direct gleich $g(a_7-a_8)$, und wir haben jetzt zur Bestimmung von $q_{\alpha\beta}$ und $r_{\alpha\beta}$ die beiden Gleichungen:

$$(5.)\qquad \begin{cases} r_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} = (\alpha|\beta) f(a_\alpha - a_\beta), \\ \dfrac{r_{\alpha\beta}}{q_{\alpha\beta}} = g(a_\alpha - a_\beta). \end{cases}$$

Ausserdem bestehen die Beziehungen

$$(6.)\qquad p_\alpha^2 r_\alpha = 1, \quad \frac{-m^4 p^2 r q}{k l^3} = 1,$$

von denen wir die letztere noch etwas zu vereinfachen haben. Multiplicirt man die acht Gleichungen $p_\alpha^2 r_\alpha = 1$, so folgt:

$$(7.)\qquad p^2 r^2 = 1.$$

Also ergiebt sich:

$$(8.)\qquad \frac{m^4}{k l^3} = -\frac{r}{q}.$$

Statt p_α dürfen wir jetzt $\frac{1}{\sqrt{r_\alpha}}$ setzen.

§ 8.

Nun fehlt noch eine Beziehung. Wir haben zwar in (8.) eine Gleichung zwischen den drei Factoren k, l, m; wir brauchen aber noch eine zweite, um ihre Verhältnisse als Functionen der Parameter a_α darstellen zu können, und zu diesem Zwecke müssen wir noch eine vierte Relation zwischen den Theta-Nullwerthen hinzunehmen. Wir wählen dieselbe Basis, wie vorhin

in § 6, lassen auch die Producte A und D ungeändert, statt B und C aber nehmen wir folgende:

$$B = c_{1368}c_{1458}c_{2358}c_{2468},$$
$$C = c_{136\pi}c_{145\pi}c_{235\pi}c_{246\pi},$$

die, wie man leicht sieht, zusammen mit

$$A = c_{1367}c_{1457}c_{2357}c_{2467},$$
$$D = c\,c_{3456}c_{1256}c_{1234}$$

eine azygetische Reihe bilden. Wir kommen also wieder zu einer Gleichung:

$$\pm A \pm B = C.$$

Hier ist das Vorzeichen von A: $(567\pi,\ 347\pi,\ 127\pi)$. Die erste Reduction giebt $-(567,\ 347,\ 127)$, und da hier überall 7 das gemeinsame Element ist, so hat das Vorzeichen den Werth:

$$-(567|7)(347|7)(127|7) = -(1234567|7) = -(8|7) = (7|8).$$

B hat das entgegengesetzte Zeichen $(8|7)$. Daher ist:

$$A - B = (7|8)C.$$

Die Umformung des Products A war schon in § 6 durchgeführt. Wir wiederholen den dort gefundenen Ausdruck, indem wir nur 1 statt $p_a^2 r_a$, und ebenso 1 statt $p^2 r^2$ schreiben:

$$A = \frac{m^4}{r}\,\frac{f(a_{1367})f(a_{1457})f(a_{2357})f(a_{2467})}{r_{12}r_{34}r_{56}r_{78}}.$$

B geht hieraus hervor, indem man den Index 7 mit 8 vertauscht. Nun ist aber, allerdings nur unter der Bedingung, dass die Summe aller a_a gleich der halben Periode s ist:

$$f(a_{1367})f(a_{1457})f(a_{2357})f(a_{2467}) - f(a_{1368})f(a_{1458})f(a_{2358})f(a_{2468})$$
$$= g(a_1-a_2)g(a_3-a_4)g(a_5-a_6)f(a_7-a_8).$$

Dies ist eine leicht zu verificirende Form des Additionstheorems der elliptischen Theta. — Hiernach folgt:

$$A - B = \frac{m^4}{r}\,\frac{g(a_1-a_2)g(a_3-a_4)g(a_5-a_6)f(a_7-a_8)}{r_{12}r_{34}r_{56}r_{78}}.$$

Nun setzen wir wieder:

$$(1.)\qquad g(a_\alpha - a_\beta) = \frac{r_{\alpha\beta}}{q_{\alpha\beta}},\quad f(a_\alpha - a_\beta) = (\alpha|\beta)\,r_{\alpha\beta}\,q_{\alpha\beta}.$$

Dann wird:

$$A-B = (7|8)\frac{m^4}{r}\,\frac{q_{78}}{q_{12}q_{34}q_{56}}.$$

Dies muss gleich $(7|8)C$ sein. Es ist also:

$$C = \frac{m^4}{r}\cdot\frac{q_{78}}{q_{12}q_{34}q_{56}}.$$

C ist ein Product von Factoren der azygetischen Gruppe:

$$C = c_{136\pi}c_{145\pi}c_{235\pi}c_{246\pi},$$

die sich in der einfacheren Form:

$$c_{\alpha\beta\gamma\pi} = \frac{l q_{\alpha\beta}q_{\alpha\gamma}q_{\beta\gamma}}{\sqrt{q_\alpha}\sqrt{q_\beta}\sqrt{q_\gamma}}$$

darstellen. Führt man die Multiplication aus, so folgt:

$$C = \frac{l^4 q_{78}}{q q_{12}q_{34}q_{56}}.$$

Demnach ist:

$$\frac{m^4}{r} = \frac{l^4}{q},$$

und wenn man dies vergleicht mit der letzten Formel im vorigen Paragraphen, so sieht man, dass der Factor l gleich $-k$ ist. Wir bekommen also:

$$l = -k;\quad m^4 = k^4\cdot\frac{r}{q}. \tag{2.}$$

Dies ist die Beziehung, die vorhin noch fehlte.

Einem der drei Factoren k, l, m dürfen wir einen willkürlichen Werth beilegen, wenn wir uns gestatten, sämmtliche Theta mit einer und derselben Constanten zu multipliciren. Wir setzen, der letzten Formel entsprechend:

$$m = \sqrt[4]{r},\quad l = \sqrt[4]{q},\quad k = -\sqrt[4]{q}. \tag{3.}$$

Diese Werthe von k, l, m, und ebenso $\frac{1}{\sqrt{r_\alpha}}$ für p_α, hat man in die Ausdrücke der einzelnen c einzusetzen, die am Anfang von § 6 zusammengestellt waren. Dann erhalten wir:

$$\tag{4.}\left\{\begin{aligned} c_\alpha &= \frac{-\sqrt[4]{q}}{\sqrt{q_\alpha}},\\ c_{\alpha\beta\gamma\pi} &= \frac{\sqrt[4]{q}\,q_{\alpha\beta}q_{\alpha\gamma}q_{\beta\gamma}}{\sqrt{q_\alpha}\sqrt{q_\beta}\sqrt{q_\gamma}},\\ c_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{\sqrt[4]{r}\,r_{\alpha\beta}r_{\alpha\gamma}\ldots r_{\gamma\delta}}{\sqrt{r_\alpha}\sqrt{r_\beta}\sqrt{r_\gamma}\sqrt{r_\delta}}f(a_{\alpha\beta\gamma\delta}).\end{aligned}\right.$$

Hierbei bedeutet q das Product aller 28 Factoren $q_{\alpha\beta}$, q_α das der sieben Factoren, deren Index das Element α enthält, und ebenso sind r, r_α definirt. Die einzelnen Grössen $q_{\alpha\beta}$, $r_{\alpha\beta}$ sind definirt durch die Gleichungen:

$$(5.)\qquad \begin{cases} q_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta} = (\alpha|\beta) f(a_\alpha - a_\beta), \\ \dfrac{r_{\alpha\beta}}{q_{\alpha\beta}} = g(a_\alpha - a_\beta). \end{cases}$$

Wir führen ausser den Functionen f und g noch ihr Product und ihren Quotienten ein:

$$(6.)\qquad f(u)g(u) = h(u), \quad \frac{f(u)}{g(u)} = e(u).$$

Dann ist:

$$(7.)\qquad q^2_{\alpha\beta} = \pm e(a_\alpha - a_\beta), \quad r^2_{\alpha\beta} = \pm h(a_\alpha - a_\beta).$$

Es werden also c_α und $c_{\alpha\beta\gamma\pi}$ rein durch die Function $e(u)$, $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ dagegen, abgesehen von dem letzten Factor, durch $h(u)$ ausgedrückt.

Die Darstellung von c_α und $c_{\alpha\beta\gamma\pi}$ zeigt ein bestimmtes Bildungsgesetz, welches auch wiederkehrt in dem Ausdruck für $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$. — Diese Grössen c_m treten in den Thetarelationen als Coefficienten auf. Es ist aber vortheilhaft, wenn wir statt ihrer andere Constanten einführen, die einen mehr symmetrischen Calcül gestatten. Wir denken uns für jede Combination $(m) = (\alpha\beta\ldots\varkappa\lambda)$ die Formen gebildet:

$$(8.)\qquad (m) = \frac{\sqrt[4]{q}\cdot q_{\alpha\beta} q_{\alpha\gamma}\ldots q_{\varkappa\lambda}}{\sqrt{q_\alpha}\sqrt{q_\beta}\ldots\sqrt{q_\lambda}}, \quad [m] = \frac{\sqrt[4]{r}\cdot r_{\alpha\beta}\ldots r_{\varkappa\lambda}}{\sqrt{r_\alpha}\ldots\sqrt{r_\lambda}},$$

sodass z. B.

$$(12) = \frac{\sqrt[4]{q}\cdot q_{12}}{\sqrt{q_1}\cdot\sqrt{q_2}}, \quad (1) = \frac{\sqrt[4]{q}}{\sqrt{q_1}}, \quad (0) = \sqrt[4]{q}, \quad [12] = \frac{\sqrt[4]{r}\cdot r_{12}}{\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}}, \quad \text{etc.}$$

ist. c_α ist dann direct mit $-(\alpha)$, $c_{\alpha\beta\gamma\pi}$ mit $+(\alpha\beta\gamma)$ identisch, während $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sich von $[\alpha\beta\gamma\delta]$ noch um den Factor $f(a_\alpha + a_\beta + a_\gamma + a_\delta)$ unterscheidet:

$$(9.)\qquad c_\alpha = -(\alpha), \quad c_{\alpha\beta\gamma\pi} = +(\alpha\beta\gamma), \quad c_{\alpha\beta\gamma\delta} = [\alpha\beta\gamma\delta] f(a_{\alpha\beta\gamma\delta}).$$

Wenn wir dann aus den (m) irgend einen Quotienten

$$\frac{(m)(n)}{(r)(mnr)}$$

zusammensetzen, so lässt sich dieser stets rational durch die Factoren $q_{\alpha\beta}$ ausdrücken.

(m) stimmt bis auf den Factor $\sqrt[4]{q}$ überein mit der Grösse, die wir

2. Für das Jahr 1894.

Die von *Leverrier* ausgeführte Bestimmung der säcularen Störungen der Bahnen, namentlich der inneren Planeten, hat bekanntlich unbefriedigende Resultate ergeben, insofern die Glieder der zweiten Näherung, welche nur ungenau und unter Umständen selbst grösser als die Glieder der ersten Näherung gefunden wurden, sich für die Berechnung der Störungen als unbrauchbar erwiesen haben. Dieses unbefriedigende Ergebniss, das in seinen weiteren Folgen mit gewissen Anomalien in der Bewegung des Mercur, beziehungsweise seines Perihels zusammenzuhängen scheint, ist *Leverrier* *) geneigt, der bisher befolgten Behandlungsweise zuzuschreiben, bei welcher in erster Näherung die Differentialgleichungen des Problems als linear betrachtet werden. Die Gesellschaft wünscht demgemäss

> eine neue Bestimmung der säcularen Störungen wenigstens der Bahnen von Mercur, Venus, Erde und Mars unter Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung

mittelst einer einwurfsfreien Methode, bei welcher die von *Leverrier* angetroffene Schwierigkeit, welche gegen die Brauchbarkeit der erhaltenen Resultate sprechen würde, als beseitigt betrachtet werden kann. — Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Umschlag begleitet sein, welcher auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift muss auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden würde, zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Sekretär der Gesellschaft (für das Jahr 1891 Geheimer Rath Professor Dr. *W. Hankel,* Hohe Strasse 15) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

*) Recherches astronomiques Chap. IX, art. 16 und Additions III, S. 51.

Leipzig, im März 1891.

Ueber eine Abbildung durch eine rationale Function.

(Von Herrn *L. Fuchs*.)

Im 75. Bande S. 177 und im 106. Bande S. 1 dieses Journals betrachtete ich eine Function

$$(\alpha.)\qquad z = F(w) = \frac{f(w)}{w.g(w)},$$

wo $f(w)$, $g(w)$ ganze rationale Functionen und $f(0)$, $g(0)$ von Null verschieden sind. Es werden in der w-Ebene die um den Nullpunkt beschriebenen concentrischen Kreise betrachtet, welche die Eigenschaft besitzen, dass jedem einem Punkte w des Kreisinnern zugehörigen Werthe z, innerhalb desselben Gebietes, nur ein einziger Werth w entspricht. Unter diesen Kreisen wird derjenige mit dem grössten Radius der *Grenzkreis* genannt. An den bezeichneten Stellen habe ich den folgenden Satz bewiesen: Der Radius des Grenzkreises wird durch den Modul derjenigen Wurzel der Gleichung

$$(\beta.)\qquad F'(w) = 0$$

bestimmt, wo $F'(w)$ die Ableitung von $F(w)$ bedeutet, welche unter allen Wurzeln derselben den kleinsten Modul besitzt, oder falls

$$(\gamma.)\qquad \psi(w, w_1) = \frac{F(w_1)-F(w)}{w_1-w} = 0$$

und

$$(\delta.)\qquad wF'(w)+w_1F'(w_1) = 0$$

Lösungen (w, w_1) besitzen, für welche die Moduln von w, w_1 einander gleich sind, und falls zu gleicher Zeit der kleinste dieser Moduln kleiner als die Moduln der Wurzeln der Gleichung $(\beta.)$ ist, so giebt derselbe den Radius des Grenzkreises an. — Dieser Satz lässt sich kürzer folgendermassen ausdrücken: Setzen wir

$$(\varepsilon.)\qquad P(w, w_1) = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial w}w}{\frac{\partial\psi}{\partial w_1}w_1}$$

und suchen unter den gemeinschaftlichen Lösungen der beiden Gleichungen (γ.) und

$$(\zeta.) \qquad P(w, w_1) = 1$$

diejenigen aus, für welche die Moduln von w und w_1 einander gleich werden, so bestimmt der kleinste unter diesen Moduln den Radius des Grenzkreises. —

In einem Aufsatze*) hat Herr *Nekrassoff* in Moskau sich bemüht, nachzuweisen, dass der eben erwähnte Satz nicht richtig sei. Der Verfasser dieses Aufsatzes zeigt besonders durch den Schluss der Nr. 3 desselben, dass er den in diesem Journal Bd. 106 S. 2—3 von mir gegebenen Beweis nicht verstanden hat. Es erscheint daher nicht überflüssig, im Folgenden durch eine Erläuterung meine dortigen Schlüsse dem Verständnisse näher zu rücken.

Bei dieser Gelegenheit erlaube ich mir, hier einen Beweis desselben Satzes zu geben, welcher auf anderen Principien begründet ist, und an und für sich nicht ohne Interesse zu sein scheint.

Für die Zwecke meiner Untersuchungen in der Arbeit dieses Journals Bd. 75, Abth. I Nr. 5—10 möge im Folgenden noch angegeben werden, wie auch in dem Falle, dass der Radius des Grenzkreises durch Vermittelung der Gleichung (δ.) zu bestimmen ist, die Grösse desselben den dortigen Anforderungen gemäss eingerichtet werden kann.

I.

Im Anschlusse an die Bezeichnungen meiner oben genannten Arbeiten, seien $w = w''$, $w_1 = w'$ zwei auf dem Grenzkreise K einander entsprechende Punkte. Bewegt sich w auf der Peripherie von K, so möge w_1 die Curven $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, ... durchlaufen. Geht w längs K durch den Punkt $w = w''$ hindurch, so wird w_1 längs einer der Curven $\mathfrak{C}$ durch den Punkt $w_1 = w'$ hindurchgehen, welche K daselbst berührt. Es möge diese Curve $\mathfrak{C}_1$ sein. — Es handelt sich nämlich (siehe Bd. 75 S. 181) um den Fall, dass $P(w'', w')$ real und endlich ist, in welchem Falle $\frac{dr_1}{d\varphi} = 0$ (siehe daselbst Gleichung (2.) S. 180) und $P(w'', w') + \frac{d\varphi_1}{d\varphi} = 0$, woraus sich ergiebt,

*) Mathem. Annalen Bd. 38 S. 82.

dass die Tangente der Curve $\mathfrak{C}_1$ in w' mit dem Radiusvector einen rechten Winkel bildet. Wegen der Symmetrie der Gleichung (γ.) in Bezug auf w und w_1 muss, wenn w auf der Peripherie von K sich bewegend durch $w = w'$ hindurchgeht, w_1 längs einer der Curven $\mathfrak{C}$ durch $w_1 = w''$ hindurchgehen, welche K daselbst berührt. Dieses möge die Curve $\mathfrak{C}_2$ sein. Es kann selbstverständlich $\mathfrak{C}_2$ mit $\mathfrak{C}_1$ übereinstimmen. — Beschreiben wir um $w = w''$ einen Kreis $\mathfrak{K}$ von hinlänglicher Kleinheit, so wird diejenige Wurzel w_1 der Gleichung (γ.), welche für $w = w''$ den Werth w' annimmt, um den Punkt $w_1 = w'$ herum eine geschlossene Fläche $\mathfrak{K}_1$ erfüllen, von der Art, dass die Punkte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ sich gegenseitig eindeutig entsprechen, wenn wir voraussetzen, dass $F'(w')$ und $F'(w'')$ von Null verschieden sind. Bezeichnen wir die Bogen der Curven $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, welche in $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ hineinfallen und respective w', w'' enthalten, mit B_1, B_2, so würden demnach von den Punkten der Fläche $\mathfrak{K}$, die ausserhalb K sich befinden, diejenigen, welche Punkten von $\mathfrak{K}_1$ innerhalb K entsprechen, sämmtlich auf der *einen* Seite β_2 von B_2 liegen, während die übrigen auf der anderen Seite β'_2 sich befinden. Ebenso werden von den Punkten der Fläche $\mathfrak{K}_1$, die ausserhalb K sich befinden, diejenigen, welche Punkten von $\mathfrak{K}$ innerhalb K entsprechen, sämmtlich auf der *einen* Seite β_1 von B_1 liegen, während die übrigen auf der anderen Seite β'_1 von B_1 sich befinden. Die beiden Seiten β_2 und β'_2 unterscheiden sich dadurch, dass man in der einen nach allen möglichen Richtungen dem w'' unendlich benachbarte Punkte angeben kann, während die dem w'' unendlich benachbarten Punkte der anderen Seite von B_2 auf der im Punkte w'' an die Curve $\mathfrak{C}_2$ und den Kreis K gelegten Tangente sich befinden müssen. In gleicher Weise unterscheiden sich die beiden Seiten β_1 und β'_1 von B_1, indem nämlich auf der einen Seite nach allen möglichen Richtungen, auf der anderen nur in der Richtung der Tangente an $\mathfrak{C}_1$ und K, dem w' unendlich benachbarte Punkte gefunden werden können. Da von den Punkten w von β_2 nach allen möglichen Richtungen zu w'' unendlich benachbarte gehören müssen, welche Punkten w_1 innerhalb $\mathfrak{K}_1$ und K entsprechen, so sind es die Punkte w auf β'_2, zu welchen nur in der Richtung der Tangente von K dem w'' unendlich benachbarte Punkte gehören, die ihre entsprechenden innerhalb $\mathfrak{K}_1$ und ausserhalb K besitzen. Aus demselben Grunde haben auch die Punkte w_1 auf β'_1 nur in der Richtung der Tangente, zu w_1 unendlich benachbarte Punkte, welche innerhalb $\mathfrak{K}$ und ausserhalb K entsprechende Punkte w besitzen. Ist daher R der



Radius des Grenzkreises K, $r = R + dr$ der Radius des unendlich benachbarten grösseren Kreises K', und sind $w = \bar{w}$, $w_1 = \bar{w}_1$ zusammengehörige auf K' gelegene Punkte, welche respective $w = w''$, $w_1 = w'$ unendlich benachbart sind, so muss $\bar{w}$ auf der Seite β_2', $\bar{w}_1$ auf der Seite β_1' sich befinden, d. h. es müssen die Punkte $\bar{w}$ und $\bar{w}_1$ der Peripherie K' respective auf den Tangenten in w'' und w' der Peripherie K gelegen sein. Hieraus folgt die Gleichung (4.) Nr. 1 der oben citirten Arbeit in Bd. 106

$$(4.) \qquad d\varphi_1 = \pm d\varphi.$$

Da

$$P(w, w_1) = -\frac{d\log w_1}{d\log w}$$

für alle Richtungen von dw und die entsprechenden dw_1 einen unabänderlichen Werth hat, wenn $F'(w)$ und $F'(w_1)$ weder Null noch Unendlich werden, so ergiebt die Gleichung

$$\frac{d\log w_1}{d\log w} = \frac{\partial r_1}{\partial r} + Ri\frac{\partial \varphi_1}{\partial r},$$

dass die reale endliche Grösse $P(w, w_1)$ in $w = w''$ *positiv* ist. Es ist nämlich $\frac{\partial r_1}{\partial r}$ negativ, wie es der Begriff des Grenzkreises erfordert. Die Gleichung

$$\frac{d\log w_1}{d\log w} = -\frac{i}{R}\frac{\partial r_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi}$$

zeigt alsdann, dass $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi}$ für $w = w''$ negativ ist. Da für $\frac{\partial r_1}{\partial \varphi} = 0$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi},$$

so folgt aus Gleichung (4.)

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi} = -1.$$

In meiner Arbeit Bd. 75 S. 181—182 ist nachgewiesen, dass für $r > R$ bis zu einer gewissen Grenze ein Continuum von Kreisen K_r existirt, auf deren Peripherien zusammengehörige Werthe w, w_1 liegen, wenn nicht eine der mit K zusammengehörigen Curven $\mathfrak{C}$ in ihrer ganzen Ausdehnung auf K fällt. Da von diesem Satz auch in Bd. 106 Gebrauch gemacht ist, so möge derselbe hier noch mit einigen Worten erläutert werden. Aus der gemachten Voraussetzung ergiebt sich, dass erst, wenn $r - R$ einen endlichen Betrag erreicht hat, eine der mit K_r zusammengehörigen Curven $\mathfrak{C}_r$

ganz innerhalb K_r befindlich sein kann. Es können aber auch nicht sämmtliche Curven $\mathfrak{C}_r$ ausserhalb K_r verlaufen. Denn wenn w von w'' ausgehend die Peripherie K_r in $w = \overline{\overline{w}}$ trifft, so wird w_1 von w' ausgehend in einem Punkte $w_1 = \overline{\overline{w}}_1$ anlangen, der entweder auf der Peripherie K_r oder ausserhalb oder innerhalb derselben gelegen ist. Liegt $\overline{\overline{w}}_1$ im Innern, so entspricht demnach einem Punkte $\overline{\overline{w}}$ der Peripherie K_r ein *innerer* Punkt $\overline{\overline{w}}_1$. Liegt $\overline{\overline{w}}_1$ im Aeusseren von K_r, so hat w_1 die Peripherie K_r bereits in einem Punkte $w_1 = \mathfrak{w}_1$ überschritten, während w noch in einem Punkte $w = \mathfrak{w}$ des Innern sich befand. Der Symmetrie der Gleichung $(\gamma.)$ wegen würde also in diesen beiden Fällen folgen, dass nicht sämmtliche Curven $\mathfrak{C}_r$ ausserhalb K_r verlaufen können. Es muss demnach die Peripherie K_r innerhalb des genannten Bereiches von r unter allen Umständen von einer der mit derselben zusammengehörigen Curven $\mathfrak{C}_r$ getroffen werden.

II.

Wir gehen nunmehr dazu über, einen einfacheren Beweis des in der Einleitung bezeichneten Satzes zu geben, welcher zugleich eine tiefere Einsicht in die algebraische Natur des hier behandelten Problems gewährt.

Wir setzen in der Gleichung

$$(1.)\qquad \psi(w, w_1) = 0$$

$$w = re^{\varphi i}, \quad w_1 = r_1 e^{\varphi_1 i},$$

wo r, r_1 die Moduln, φ, φ_1 die Argumente von w, w_1 bedeuten. Auf der Peripherie jedes mit dem Radius r um den Nullpunkt beschriebenen Kreises K_r suchen wir diejenigen Stellen auf, für welche

$$(2.)\qquad \frac{dr_1}{d\varphi} = 0.$$

Aus (1.) ergiebt sich, wenn r constant und φ veränderlich angenommen wird, in der Bezeichnung der Gleichung $(\varepsilon.)$,

$$(3.)\qquad P(w, w_1) - \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi}i + \frac{d\varphi_1}{d\varphi} = 0.$$

Es giebt nur eine endliche Anzahl von Kreisen K_r, auf deren Peripherie $P(w, w_1)$ unendlich wird. Demnach folgt aus Gleichung (3.), dass $\frac{dr_1}{d\varphi}$ längs der Peripherie K_r im Allgemeinen eine stetige Function von φ ist, und da r_1 längs K_r Maximal- und Minimalwerthe annimmt, so folgt, dass

im Allgemeinen auf jedem Kreise K_r Stellen vorhanden sind, welchen Wurzeln der Gleichung (2.) zugehören. Wir bezeichnen diese Stellen mit $m_r, m'_r, m''_r, \ldots$. Die Gleichung (3.) ergiebt, dass in allen diesen Stellen $P(w, w_1)$ reale Werthe erhält. Aus derselben Gleichung folgt umgekehrt, dass, wenn $P(w, w_1)$ in einem Punkte der Peripherie K_r real und endlich ist, dieser Punkt zu den Stellen $m_r, m'_r, m''_r, \ldots$ gehört.

Bezeichnen wir daher mit $\psi_1(w, w_1)$ diejenige Function von w, w_1, welche aus $\psi(w, w_1)$ hervorgeht, wenn die Coefficienten der letzteren durch ihre conjugirten Werthe ersetzt werden, und mit w', w'_1 die conjugirten Werthe resp. von w und w_1, so folgt aus den eben gemachten Schlüssen, dass die Werthe von r_1, φ_1, φ, welche den Stellen $m_r, m'_r, m''_r, \ldots$ entsprechen, durch die Gleichung (1.) und die Gleichungen

$$(1^a.) \qquad \psi_1(w', w'_1) = 0$$

und

$$(4.) \qquad P(w, w_1) = P_1(w', w'_1)$$

bestimmt werden, wenn wir unter $P_1(w, w_1)$ diejenige Function verstehen, welche aus $P(w, w_1)$ dadurch hervorgeht, dass die Coefficienten der letzteren durch ihre conjugirten Werthe ersetzt werden. Es ergeben sich hiernach $r_1, e^{\varphi_1 i}, e^{\varphi i}$ als algebraische Functionen von r. Hierdurch wird auch $P(w, w_1)$ eine bestimmte algebraische Function von r. Eliminiren wir zwischen den Gleichungen (1.), (1^a.) und (4.) $e^{\varphi i}, e^{\varphi_1 i}$, so erhalten wir zwischen r, r_1 die algebraische Gleichung

$$(5.) \qquad G(r, r_1) = 0.$$

Wenn wir für jeden Kreis K_{r_1} mit dem Radius r_1 diejenigen Stellen aufsuchen, für welche $\frac{dr}{d\varphi_1} = 0$, so wird aus demselben Grunde

$$\frac{\frac{\partial\psi}{\partial w_1} w_1}{\frac{\partial\psi}{\partial w} w}$$

daselbst real; das heisst aber nichts anderes, als dass $P(w, w_1)$ real wird. Es werden also die Werthe von $r, e^{\varphi i}, e^{\varphi_1 i}$, welche den Stellen auf K_{r_1} entsprechen, wo $\frac{dr}{d\varphi_1} = 0$ wird, aus denselben Gleichungen (1.), (1^a.) und (4.) zu bestimmen sein. Das Eliminationsresultat von $e^{\varphi i}, e^{\varphi_1 i}$ aus diesen Gleichungen ist also wiederum die Gleichung (5.). Es haben aber r und r_1 jetzt ihre Rollen vertauscht, hieraus folgt:

Die Gleichung (5.) *ist in Bezug auf r und r_1 symmetrisch.*

III.

Die auf den verschiedenen Kreisen K_r gelegenen Punkte $m_r, m'_r, m''_r, \dots$ bilden ein System von Curven, welches wir mit Γ bezeichnen wollen. Schreiten wir längs einer dieser Curven fort, so folgt aus der Gleichung

$$(1.)\qquad P(w, w_1)\left(\frac{1}{r}+i\frac{d\varphi}{dr}\right)+\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{dr}+i\frac{d\varphi_1}{dr} = 0$$

(welche durch Differentiation aus Gleichung (1.) voriger Nummer hervorgeht), weil $P(w, w_1)$ real ist, dass

$$(2.)\qquad P(w, w_1) = -\frac{r}{r_1}\frac{dr_1}{dr}.$$

Hierbei ist der Werth von $\frac{dr_1}{dr}$ aus der Gleichung

$$(3.)\qquad \frac{\partial G}{\partial r}+\frac{\partial G}{\partial r_1}\frac{dr_1}{dr} = 0$$

zu bestimmen.

Es folgt hieraus zunächst, *dass $G(r, r_1)$ nicht durch eine Potenz von r_1-r theilbar sein darf.*

Ist nämlich $w = p_r$ ein solcher Punkt der Peripherie K_r des Kreiscontinuums, von welchem in Nr. I die Rede war, zu dem ein auf derselben Peripherie gelegener Punkt $w_1 = q_r$ gehört, so würde die Voraussetzung, dass $G(r, r_1)$ durch eine Potenz von $r-r_1$ theilbar sei, zur Folge haben, dass die stetige Reihe der Punkte p_r eine Curve A bildete, welche zu den Curven des Systems Γ gehörte und für welche $\frac{dr_1}{dr} = 1$ wäre. Nach Gleichung (2.) müsste dann $P(w, w_1)$ für alle Werthe w der Curve A, also nach einem bekannten Satze *überhaupt in der ganzen w-Ebene gleich der negativen Einheit sein.* Es wäre also

$$\frac{\partial\psi}{\partial w}w+\frac{\partial\psi}{\partial w_1}w_1 = 0,$$

was zur Folge hätte, dass $\psi(w, w_1)$ durch einen Linearfactor w_1-cw mit constantem c theilbar wäre. Dieses ist aber nicht möglich, weil $\psi(w, w_1)$ nicht für $w = 0$, $w_1 = 0$ verschwindet.

Setzen wir daher in Gleichung (5.) voriger Nummer $r_1 = r$, so erhalten wir eine wohlbestimmte algebraische Gleichung

$$(4.)\qquad H(r) = 0.$$

Ist r gleich einer realen Wurzel dieser Gleichung, so fallen die Punkte w_1, welche den Stellen $m_r, m'_r, m''_r, \dots$ auf der Peripherie K_r zugehören, theilweise oder ganz auf dieselbe Peripherie.



Der Radius des Grenzkreises ist daher mit der ***kleinsten realen Wurzel*** der Gleichung (4.) übereinstimmend.

Ist $r = a$ eine reale Wurzel der Gleichung (4.) und $w = \mu$ eine derjenigen Stellen m_a, m'_a, m''_a, ..., denen auf der Peripherie K_a Werthe w_1 zugehören, und setzen wir zunächst voraus, dass nicht $\frac{\partial G}{\partial r}$ und $\frac{\partial G}{\partial r_1}$ für $r = r_1 = a$ verschwinden, so folgt aus den Gleichungen (2.) und (3.), ***dass $P(w, w_1)$ in μ gleich der positiven Einheit ist.***

Ist $a = R$ der Radius des Grenzkreises, so bleibt dieses auch bestehen, wenn $\frac{\partial G}{\partial r}$, $\frac{\partial G}{\partial r_1}$ für $r = r_1 = R$ verschwinden würden. Es ist nämlich in diesem Falle, wenn $H'(r)$ die Ableitung von $H(r)$ bedeutet, wegen der Symmetrie von $G(r, r_1)$ in Bezug auf r und r_1 auch $H'(R) = 0$. Ist Δ die Discriminante von $H(r)$, so müsste demnach Δ verschwinden. Die Discriminante Δ ist eine ganze rationale Function der realen und imaginären Bestandtheile von Coefficienten der Function $F(w)$. Es sei A einer dieser Coefficienten. Ferner sei $F_1(w)$ diejenige Function, in welche $F(w)$ übergeht, wenn wir A durch $A_1 = A + \varepsilon$ ersetzen, während wir die übrigen Coefficienten beibehalten; endlich sei $H_1(r)$ aus $F_1(w)$ ebenso hergeleitet wie $H(r)$ aus $F(w)$. Wir wollen ε real nehmen, wenn in Δ der reale Theil von A auftritt, und rein imaginär, wenn nur der imaginäre Theil von A in Δ enthalten ist. Alsdann wird die Discriminante Δ_1 von $H_1(r)$ ausser für $\varepsilon = 0$ erst für einen Werth von ε verschwinden, dessen absoluter Betrag eine gewisse Grenze g überschreitet.

Für die Werthe von ε innerhalb dieses Bereiches sind aber der Radius des Grenzkreises, sowie die zusammengehörigen Stellen w, w_1 auf seiner Peripherie stetige Functionen von ε. Demnach ist auch $P(w, w_1)$ für dasselbe Werthenpaar w, w_1 eine stetige Function von ε, so lange $\mathrm{mod}\,\varepsilon < g$, bis $\varepsilon = 0$ einschliesslich (wenn nicht auf dem zu $F(w)$ gehörigen Grenzkreise $F'(w)$ Null oder Unendlich wird). Da nun diese algebraische Function $P(w, w_1)$ in dem ganzen Bereich $0 < \mathrm{mod}\,\varepsilon < g$ den Werth Eins hat, so muss auch für $\varepsilon = 0$ derselbe Werth erhalten werden. —

IV.

Die Gleichung (4.) voriger Nummer kann auch als das Resultat der Elimination von $e^{\varphi i}$, $e^{\varphi_1 i}$ aus den Gleichungen

$$(1.)\qquad \psi(re^{\varphi i}, re^{\varphi_1 i}) = 0,$$
$$(2.)\qquad \psi_1(re^{-\varphi i}, re^{-\varphi_1 i}) = 0,$$
$$(3.)\qquad P(re^{\varphi i}, re^{\varphi_1 i}) - P_1(re^{-\varphi i}, re^{-\varphi_1 i}) = 0$$

erhalten werden (siehe Nr. II), und es ist $r = R$, der Radius des Grenzkreises, die kleinste reale Wurzel der Gleichung (4.) voriger Nummer.

Die Gleichungen (1.), (2.), (3.) können auch erhalten werden, wenn wir den realen und imaginären Theil von $\psi(w, w_1)$ und den imaginären Theil von $P(w, w_1)$ gleich Null setzen. Unser in der Einleitung erwähnter Satz besagt daher:

Wenn $r = R$ der kleinste reale Werth ist, für welchen diese drei Gleichungen reale Lösungen $\varphi = \varphi''$, $\varphi_1 = \varphi'$ zulassen, so ist von selbst der reale Theil von

$$P(Re^{\varphi'' i}, Re^{\varphi' i})$$

bestimmt. Er erhält nämlich den Werth Eins *).

V.

Im 75. Bande dieses Journals Abth. I Nr. 5—10 habe ich folgende Aufgabe behandelt.

Es seien $z_1, z_2, \dots z_{m+1}$ in der Ebene der complexen Variabeln z willkürlich gegebene Punkte, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m+1}$, $(m+1)$ verschiedene ganzzahlige Wurzeln der Einheit, welche durch eine Gleichung

$$(1.)\qquad w^n - 1 = 0$$

bestimmt werden, wo $n \geqq m+1$. — Es soll die rationale Function

$$(2.)\qquad z = F(w)$$

(von der Gestalt der Gleichung (α.) in der Einleitung) so gewählt werden, dass $w = \alpha_k$ werde für $z = z_k$, und dass der Radius des zu $F(w)$ gehörigen Grenzkreises grösser als Eins werde. —

Wir haben daselbst diese Bestimmung durchgeführt unter der Voraussetzung, dass der kleinste Modul der Wurzeln der Gleichung $F'(w) = 0$

*) Hierdurch löst sich das Paradoxon des Herrn *Nekrassoff* in Nr. 3 seiner Arbeit von selbst, da seine Gleichung $\xi(a) = 0$ eine Identität darstellt. Aus dem Obigen erkennt man auch unmittelbar, warum in Nr. 4 seines Aufsatzes Herr *Nekrassoff* mit der blossen Gleichung $\frac{dr_1}{d\theta} = 0$ nicht zu meinen Resultaten gelangen konnte.

den Radius des Grenzkreises liefert. Wir wollen hier dasselbe für den Fall thun, dass dieser Radius vermittelst der Gleichungen

$$\psi(w, w_1) = 0$$

und

$$F'(w)w + F'(w_1)w_1 = 0$$

erhalten wird.

Sei wie in Bd. 75 S. 186 Gleichung (2.)

$$(3.)\qquad \varphi(w) = \sum_1^{m+1}{}_i \frac{\alpha_i z_i}{f'(\alpha_i)} f_i(w),$$

$$f(w) = (w-\alpha_1)\dots(w-\alpha_{m+1}),$$

$$f_i(w) = \frac{f(w)}{w-\alpha_i}.$$

Wir setzen nunmehr

$$\frac{\varphi(w)}{w} = g(w),$$

$$\frac{w^n-1}{w(Aw^n+B)} = h(w)$$

und

$$(4.)\qquad z = F(w) = g(w)+a.h(w),$$

wo a, A, B noch verfügbare Constanten bedeuten, von denen jedoch A, B real sein mögen. Ist der Radius des zu $g(w)$ gehörigen Grenzkreises grösser als Eins, so sei $a = 0$.

Im entgegengesetzten Falle wollen wir beweisen, dass wir a so wählen können, dass für die Function $F(w)$ in Gleichung (4.) diese Bedingung erfüllt ist.

Die Gleichung

$$F(w_1) = F(w)$$

geht für $a = \infty$ über in

$$(5.)\qquad h(w_1)-h(w) = 0;$$

hieraus folgt:

$$(6.)\qquad \frac{w_1}{w} = \frac{w_1^n-1}{w^n-1}\cdot\frac{Aw^n+B}{Aw_1^n+B}.$$

Befinden sich w und w_1 auf der Peripherie desselben um $w = 0$ beschriebenen Kreises, ist also $w = re^{\varphi i}$, $w_1 = re^{\varphi_1 i}$, so folgt:

$$\operatorname{mod}\frac{w_1}{w} = 1,$$

woraus sich ergiebt

$$(7.)\qquad [e^{n\varphi_1 i}+e^{-n\varphi_1 i}-(e^{n\varphi i}+e^{-n\varphi i})](A-B)^2 = 0.$$

Sind A, B von einander verschieden, so erfordert diese Gleichung, dass

$$(8.)\qquad e^{n\varphi_1 i} = e^{n\varphi i}$$

oder

$$(8^a.)\qquad e^{n\varphi_1 i} = e^{-n\varphi i}.$$

Aus der Gleichung

$$F'(w)w+F'(w_1)w_1 = 0$$

folgt für $a=\infty$

$$(9.)\qquad \frac{-Aw^{2n}+[(n-1)B+(n+1)A]w^n+B}{w(Aw^n+B)^2}+\frac{-Aw_1^{2n}+[(n-1)B+(n+1)A]w_1^n+B}{w_1(Aw_1^n+B)^2}=0.$$

Im Falle (8.) wäre für die gemeinschaftlichen Lösungen von (5.) und (9.)

$$w^n = w_1^n,$$

das heisst

$$(10.)\qquad -Aw^{2n}+[(n-1)B+(n+1)A]w^n+B = 0$$

oder

$$(10^a.)\qquad Aw^n+B = 0$$

oder

$$(10^b.)\qquad \frac{1}{w}+\frac{1}{w_1} = 0.$$

Wenn wir n als ungerade Zahl wählen, so ist (10^b.) auszuschliessen. — Es sei

$$(11.)\qquad \frac{B}{A} = -\frac{n+1}{n-1},$$

so liefern (10.) und (10^a.) nur Werthe von w, deren Modul grösser als Eins ist. Die Gleichung (10.) stimmt übrigens mit der Gleichung

$$h'(w) = 0$$

überein.

Die Gleichung (9.) kann vermittelst (5.) auch in die Form

$$(9^a.)\qquad K(w^n, w_1^n) = \frac{-(n-1)w^{2n}+n+1}{(w^n-1)((n-1)w^n+n+1)}+\frac{-(n-1)w_1^{2n}+n+1}{(w_1^n-1)((n-1)w_1^n+n+1)} = 0$$

gesetzt werden.

Sei $a=\alpha+\beta i$, so folgt aus

$$wF'(w)+w_1F'(w_1) = 0:$$

$$(12.)\qquad \alpha+\beta i = -\frac{g'(w)w+g'(w_1)w_1}{K(w^n, w_1^n)}.$$

Setzen wir voraus, dass von den Grössen α, β die eine unendlich gross

werde, während die andere endlich bleibt, und nehmen wir an, dass die Gleichung (8^a.) statt habe. Alsdann müssten auf dem Grenzkreise von $F(w)$ für diesen Werth von a zwei Werthe w, w_1 sich befinden, von der Beschaffenheit, dass

$$K(w^n, w_1^n) = 0$$

und dass w^n, w_1^n conjugirte Werthe sind. Da $K(w^n, w_1^n)$ reale Coefficienten hat und in Bezug auf die Argumente w^n, w_1^n symmetrisch ist, so würde der conjugirte Werth von $K(w^n, w_1^n)$ für dasselbe Werthenpaar verschwinden. Aus Gleichung (12.) ergiebt sich demnach, dass auch

$$\alpha - \beta i = -\frac{g_1'(w')w' + g_1'(w_1')w_1'}{K(w'^n, w_1'^n)},$$

wo $g_1(w)$ aus $g(w)$ erhalten wird, wenn in letzterer Function die Coefficienten durch ihre conjugirten Werthe ersetzt werden, für dasselbe Werthenpaar unendlich wird. Es müssten demnach α und β für dasselbe Werthenpaar gleichzeitig unendlich werden, gegen die Voraussetzung. Wenn demnach $a = \alpha + \beta i$ so gewählt wird, dass der absolute Werth nur einer der beiden Grössen α und β eine gewisse Grenze überschreitet, die andere aber einen beliebig gewählten endlichen Werth hat, so kann der Fall (8^a.) nicht eintreten. ***Der Radius des Grenzkreises von $F(w)$ ist daher alsdann grösser als Eins.*** Die nähere Bestimmung von a erfolgt auf analoge Weise wie die der entsprechenden Grösse a in meiner Arbeit Bd. 75, Abth. I, Nr. 6—10.

Theorie der elliptisch-hyperelliptischen Functionen von vier Argumenten*).

(Von Herrn *F. Schottky* in Zürich.)

Zweiter Abschnitt.

§ 9.

Indem wir zu den Thetafunctionen selbst übergehen, theilen wir sie zunächst in vier Gruppen, nach dem Congruenzwerth modulo 4, den die Ordnungszahl des Index besitzt. So gehören in die erste Gruppe Θ_1 und $\Theta_{12345} = \Theta_{678\pi}$, in die zweite Θ_{12} und $\Theta_{123456} = \Theta_{78\pi}$, in die dritte Θ_{123} und $\Theta_{1234567} = \Theta_{8\pi}$, endlich in die vierte Θ, Θ_π und die Grössen Θ_{1234}, Θ_{1235} etc.

Diese Eintheilung knüpft sich zwar formal an die Wahl der Fundamentalreihe, sie ist aber doch davon unabhängig. Denn die Functionen der ersten und vierten Gruppe sind gerade, die der zweiten und dritten ungerade; ferner verhalten sich die der zweiten und vierten Gruppe syzygetisch, die der ersten und dritten azygetisch zu den beiden ausgezeichneten Functionen Θ, Θ_π. Also diese beiden rufen die Unregelmässigkeit hervor, die zur Aufstellung der vier Gruppen zwingt.

Zwei Grössen Θ_m, $\Theta_{m\pi}$, deren Indices complementär sind, die also durch die ausgezeichnete halbe Periode π in einander übergeführt werden, nennen wir zugeordnete Functionen. Für die Theta der ersten und dritten Gruppe ist das Product $\Theta_m \Theta_{m\pi}$ ungerade, für die übrigen gerade.

Wir setzen aber in der nächsten Untersuchung die Argumente nicht als unbeschränkt voraus, sondern gehen zunächst darauf aus, eine particuläre Lösung zu finden, und zwar diejenige, die den Bedingungen:

$$\Theta = 0, \quad \Theta_\pi = 0$$

entspricht. Wir nehmen also diejenigen beiden Theta, deren Entwicklung mit der zweiten Dimension anfängt, überhaupt gleich 0 an.

---

*) Fortsetzung von Seite 178 dieses Bandes.

Alle Relationen haben die Form:

$$(1.)\qquad (af,\ afK,\ afL)c_a c_{aK}\Theta_{aL}\Theta_{aKL} + \text{etc.} = c_f c_{fK}\Theta_{fL}\Theta_{fKL}.$$

Die Vorzeichen aber ändern sich nicht, wenn man L durch $L\pi$ ersetzt. Denn es ist:

$$(af,\ afK,\ afL\pi) = (af,\ afK,\ afL)(af,\ afK,\ \pi).$$

Der zweite Factor auf der rechten Seite ist $+1$ oder -1, je nachdem:

$$\frac{\Theta_a\Theta_{aK}}{\Theta_f\Theta_{fK}}$$

eine gerade oder ungerade Function ist. In unseren Gleichungen aber bedeuten Θ_a, Θ_{aK} etc. stets gerade Theta, und deshalb ist:

$$(af,\ afK,\ afL\pi) = (af,\ afK,\ afL).$$

Aus dieser Bemerkung lässt sich eine Folgerung ziehen, die wir mehrfach brauchen werden. Indem man $L\pi$ statt L schreibt, hat man jedes Theta, das in der Relation vorkommt, durch sein zugeordnetes ersetzt. Da hierbei die Vorzeichen ungeändert bleiben, so gilt der Satz:

Alle Thetarelationen, und alle Schlüsse, die aus ihnen folgen, bleiben bestehen, wenn man jedes Θ_m durch das entsprechende $\Theta_{m\pi}$ ersetzt.

Die Gleichungen (1.) sind im allgemeinen sechsgliedrig. Sie reduciren sich auf viergliedrige, auch bei unbeschränkten Argumenten, wenn in zwei Termen die Factoren c und c_π, die der Voraussetzung nach 0 sind, vorkommen. Wählen wir dann noch die Periode L so, dass ein Glied die verschwindende Function Θ oder Θ_π enthält, so besteht die Gleichung nur aus drei Gliedern. Diese Gleichungen sind die einfachsten, und wir nehmen sie zum Ausgangspunkt. Es treten aber in ihnen nur die ungeraden und zu Θ, Θ_π syzygetischen Functionen auf, also die Theta der zweiten Gruppe $\Theta_{\alpha\beta}$ und $\Theta_{\alpha\beta\pi}$.

§ 10.

Die ersten speciellen Relationen, die wir benutzen, sind folgende:

$$(1.)\qquad (2|3)c_1c_{234\pi}\Theta_{14}\Theta_{23\pi} + (3|1)c_2c_{314\pi}\Theta_{24}\Theta_{31\pi} + (1|2)c_3c_{124\pi}\Theta_{34}\Theta_{12\pi} = 0,$$

$$(2.)\qquad c_{145\pi}c_{235\pi}\Theta_{13}\Theta_{24} - c_{245\pi}c_{135\pi}\Theta_{23}\Theta_{14} = (1|2)(3|4)c_5c_{678\pi}\Theta_{12\pi}\Theta_{34\pi}.$$

Die erste Gleichung beruht auf der azygetischen Reihe von Producten

gerader Theta:

$$\Theta_1\Theta_{234\pi},\quad \Theta_2\Theta_{341\pi},\quad \Theta_3\Theta_{412\pi},\quad \Theta_4\Theta_{123\pi},\quad \Theta_\pi\Theta_{1234},\quad \Theta\Theta_{1234\pi}.$$

Zwischen diesen sechs Grössen muss, dem allgemeinen Satz zufolge, eine lineare Relation bestehen, deren Coefficienten

$$\pm c_1 c_{234\pi},\quad \ldots\quad \pm c_\pi c_{1234},\quad \pm c c_{1234\pi}$$

sind. Die beiden letzten Coefficienten sind aber 0. Wenn man nun die Argumente um die halbe Periode $L = 4$ vermehrt, so geht Θ_4 in Θ über, und man erhält die Gleichung (1.), nur dass die Vorzeichen noch zu bestimmen sind.

Diese Vorzeichen seien der Reihe nach ε_1, ε_2, ε_3. Bringen wir das letzte Glied, mit positivem Vorzeichen, auf die andere Seite, so bekommt das erste Glied das Zeichen $-\varepsilon_1\varepsilon_3$:

$$-\varepsilon_1\varepsilon_3 c_1 c_{234\pi}\Theta_{14}\Theta_{23\pi}+\cdots = c_3 c_{124\pi}\Theta_{34}\Theta_{12\pi}.$$

Um jetzt $-\varepsilon_1\varepsilon_3$ zu finden, hat man den Index 3 mit 1, 234π und 14 zu combiniren:

$$-\varepsilon_1\varepsilon_3 = (13,\ 24\pi,\ 134) = (13,\ 24,\ 134) = (2|13).$$

Nimmt man also $\varepsilon_1 = (2|3)$ an, so wird $\varepsilon_3 = (1|2)$. Damit sind die Vorzeichen der Gleichung (1.) verificirt. Da aber diese Zeichenbestimmungen beständig in derselben Weise wiederkehren, so übergehen wir sie von jetzt an.

Die zweite Formel basirt auf der Reihe:

$$\Theta_{145\pi}\Theta_{235\pi},\quad \Theta_{245\pi}\Theta_{315\pi},\quad \Theta_{345\pi}\Theta_{125\pi},$$
$$\Theta_5\Theta_{678\pi},\quad \Theta\Theta_{1234},\quad \Theta_\pi\Theta_{5678},$$

und sie wird gefunden, indem man in der Gleichung, die zwischen diesen Producten besteht, die Argumente vermehrt um die halbe Periode $L = 345\pi$.

Wir schreiben nun in beiden Relationen zunächst $-(\alpha)$ für c_α und $(\alpha\beta\gamma)$ oder $(\varkappa\lambda\mu\nu\varrho)$ für $c_{\alpha\beta\gamma\pi}$, sodass wir erhalten:

$$(2|3)(1)(234)\Theta_{14}\Theta_{23\pi}+\cdots = 0,$$
$$(145)(235)\Theta_{13}\Theta_{24}-\cdots = -(1|2)(3|4)(5)(12345)\Theta_{12\pi}\Theta_{34\pi}.$$

Nun sind aber leicht aus der Definition des Ausdrucks (m) folgende Beziehungen zu erkennen:

$$(1)(234) = \frac{(0)(1234)}{q_{12}\,q_{13}\,q_{14}},$$
$$(145)(235) = \frac{(5)(12345)}{q_{12}\,q_{13}\,q_{24}\,q_{34}},$$

und da wir (0)(1234), ebenso wie (5)(12345), als gemeinsamen Factor fortlassen dürfen, so ergiebt sich einfacher:

$$(2|3)\,\frac{\Theta_{14}\Theta_{23\pi}}{q_{12}q_{13}q_{14}}+(3|1)\,\frac{\Theta_{24}\Theta_{31\pi}}{q_{21}q_{23}q_{24}}+(1|2)\,\frac{\Theta_{34}\Theta_{12\pi}}{q_{31}q_{32}q_{34}} = 0,$$

$$\frac{\Theta_{13}\Theta_{24}}{q_{12}q_{13}q_{14}q_{34}}-\frac{\Theta_{23}\Theta_{14}}{q_{21}q_{23}q_{14}q_{24}} = -(1|2)(3|4)\Theta_{12\pi}\Theta_{34\pi}.$$

Wir führen statt $\Theta_{\alpha\beta}$ und $\Theta_{\alpha\beta\pi}$ Hülfsgrössen $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ ein, indem wir setzen:

$$(3.)\qquad \begin{cases} \Theta_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}, \\ \Theta_{\alpha\beta\pi} = (\alpha|\beta)\,\dfrac{B_{\alpha\beta}}{q_{\alpha\beta}}. \end{cases}$$

Hier ist $A_{\beta\alpha}=A_{\alpha\beta}$, dagegen $B_{\beta\alpha}=-B_{\alpha\beta}$. Diese A, B genügen dann den Gleichungen:

$$(4.)\qquad \begin{cases} A_{14}B_{23}+A_{24}B_{31}+A_{34}B_{12} = 0, \\ A_{14}A_{23}-A_{24}A_{13} = B_{12}B_{34}. \end{cases}$$

Bilden wir den Quotienten:

$$(5.)\qquad \frac{B_{\alpha\beta}}{A_{\alpha\beta}} = C_{\alpha\beta},$$

so ist dieser, ebenso wie $B_{\alpha\beta}$, alternirend. Wir wollen eine Gleichung ableiten, die zwischen diesen Quotienten allein besteht. Indem wir in den Gleichungen (4.) $B_{\alpha\beta}$ durch $A_{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}$ ersetzen, erhalten wir:

$$A_{14}A_{23}C_{23}+A_{24}A_{31}C_{31}+A_{34}A_{12}C_{12} = 0,$$

$$A_{14}A_{23}-A_{24}A_{31} = A_{34}A_{12}C_{34}C_{12},$$

und hieraus:

$$(6.)\qquad \frac{A_{12}A_{34}}{A_{13}A_{24}} = \frac{C_{13}-C_{23}}{C_{12}(1-C_{32}C_{34})},$$

$$(7.)\qquad \frac{A_{14}A_{23}}{A_{13}A_{24}} = \frac{1-C_{21}C_{34}}{1-C_{32}C_{34}}.$$

Hier aber, wie überhaupt in allen unsern Formeln, dürfen wir die Indices permutiren. Wir dürfen also in der letzten Gleichung 2 und 4 vertauschen:

$$\frac{A_{12}A_{34}}{A_{13}A_{24}} = \frac{1-C_{31}C_{32}}{1-C_{32}C_{34}}.$$

Vergleicht man dies mit (6.), so folgt:

$$C_{12}(1-C_{31}C_{32}) = C_{13}-C_{23},$$

oder:

$$(8.)\qquad C_{12}+C_{23}+C_{31}+C_{12}C_{23}C_{31} = 0.$$

lassen für $\alpha\beta = 12$, 13 und 23. Zwischen x_{14}, x_{24} und x_{12} bestehen nun zwei ähnliche Beziehungen, die gleichfalls erfüllt werden für $x_{14} = e(u+a_1+a_4)$ etc. Eliminirt man aus diesen x_{24}, so bekommt man eine quadratische Gleichung zwischen x_{12} und x_{14} zur Bestimmung von x_{14}. Allerdings definirt diese x_{14} noch nicht eindeutig, wenn man $x_{12} = e(u+a_1+a_2)$ annimmt, aber man kann eine zweite Gleichung aufstellen zwischen x_{13} und x_{14}; beide haben dann nur die Wurzel $x_{14} = e(u+a_1+a_4)$ gemeinsam.

Ebenso aber, wie die Gleichung (1.) eine vollständige Lösung des Systems darstellt, dürften wir auch

$$x_{\alpha\beta} = -e(u+a_\alpha+a_\beta)$$

setzen, und es ist wegen der folgenden Entwickelungen vortheilhaft, wenn wir das Vorzeichen noch nicht fixiren. Wir nehmen deshalb an:

$$(2.)\qquad x_{\alpha\beta} = \delta . e(u+a_\alpha+a_\beta) \qquad (\alpha\beta = 12,\ 13,\ \dots\ 78),$$

wo δ ein Vorzeichen bedeutet, das wir beliebig wählen dürfen, das wir aber noch unbestimmt lassen.

Jetzt kehren wir zu den Grössen $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, $C_{\alpha\beta}$ zurück. Es ist, nach (10.) im vorigen Paragraphen:

$$C_{\alpha\beta} = \delta \cdot \frac{e(a_\alpha - a_\beta)}{e(u+a_\alpha+a_\beta)},$$

und somit, nach (7.):

$$\frac{A_{14}A_{23}}{A_{13}A_{21}} = \frac{1 - \dfrac{e(a_3-a_1)e(a_3-a_4)}{e(u+a_3+a_1)e(u+a_3+a_4)}}{1 - \dfrac{e(a_3-a_2)e(a_3-a_4)}{e(u+a_3+a_2)e(u+a_3+a_4)}}.$$

Hier sind Zähler und Nenner elliptische Functionen zweiten Grades, der Klasse, welcher $e^2(u)$ angehört. Der Quotient ist aber auch nur vom zweiten Grade, weil Zähler und Nenner einen Unendlichkeitspunkt: $u = -a_3 - a_4$, und einen Nullpunkt: $u = -2a_3$, gemeinsam haben. Diese Function zweiten Grades verschwindet offenbar für $u = -a_1 - a_4$ und $u = -a_2 - a_3$, und sie wird unendlich für $u = -a_1 - a_3$, $u = -a_2 - a_4$; ferner wird sie gleich 1 für $u = -a_3 - a_4 + s$. Deshalb ist sie mit folgendem Ausdruck identisch:

$$\frac{A_{14}A_{23}}{A_{13}A_{24}} = \frac{g(a_1-a_4)g(a_2-a_3)}{g(a_1-a_3)g(a_2-a_4)} \cdot \frac{f(u+a_1+a_4)f(u+a_2+a_3)}{f(u+a_1+a_3)f(u+a_2+a_4)}.$$

Führt man die Thetafunctionen wieder ein:

$$A_{\alpha\beta} = \frac{\Theta_{\alpha\beta}}{q_{\alpha\beta}},$$

und bemerkt, dass

$$q_{\alpha\beta}\, g(a_\alpha - a_\beta) = r_{\alpha\beta}$$

ist, so folgt:

$$(3.)\qquad \frac{\Theta_{14}\Theta_{23}}{\Theta_{13}\Theta_{24}} = \frac{r_{14}r_{23}}{r_{13}r_{24}}\,\frac{f(u+a_1+a_4)f(u+a_2+a_3)}{f(u+a_1+a_3)f(u+a_2+a_4)}.$$

Wir können auch

$$\frac{[14][23]}{[13][24]} \quad \text{statt} \quad \frac{r_{14}r_{23}}{r_{13}r_{24}}$$

schreiben, da

$$[\alpha\beta] = \frac{\sqrt[4]{r}\,r_{\alpha\beta}}{\sqrt{r_\alpha}\sqrt{r_\beta}}$$

ist. Dann führt die Gleichung (3.) zu folgendem Schluss:

Wird allgemein:

$$\Theta_{\alpha\beta} = [\alpha\beta]f(u+a_\alpha+a_\beta)R_{\alpha\beta}$$

gesetzt, so ist:

$$\frac{R_{14}R_{23}}{R_{13}R_{24}} = 1,$$

mithin dürfen wir nach dem schon in § 4 aufgestellten Hülfssatz $R_\alpha R_\beta$ statt $R_{\alpha\beta}$ setzen. Wir fügen noch einen von den Indices unabhängigen Factor Φ hinzu; dann gewinnen wir den Vortheil, einen der acht Factoren R_α willkürlich wählen zu dürfen. Aus den Gleichungen:

$$(4.)\qquad \Theta_{\alpha\beta} = [\alpha\beta]f(u+a_\alpha+a_\beta)R_\alpha R_\beta\Phi,$$

$$\frac{\Theta_{\alpha\beta}}{\Theta_{\alpha\beta\pi}} = \delta.e(u+a_\alpha+a_\beta)$$

folgt dann:

$$(5.)\qquad \Theta_{\alpha\beta\pi} = \delta.[\alpha\beta]g(u+a_\alpha+a_\beta)R_\alpha R_\beta\Phi.$$

Hiermit sind die Folgerungen erschöpft, die wir aus den am Anfang des vorigen Paragraphen aufgestellten Relationen ziehen können.

§ 12.

Wir bilden noch eine Thetarelation von anderer Art, die ebenfalls nur die Grössen $\Theta_{\alpha\beta}$, $\Theta_{\alpha\beta\pi}$ enthält. Diese führt zur Bestimmung der Factoren R_α. Wir betrachten die azygetische Reihe, die durch die fünf Producte $\Theta_{\alpha678}\Theta_{\alpha678\pi}(\alpha = 1, 2, 3, 4, 5)$ und $\Theta\Theta_\pi$ gebildet wird. In der Gleichung, die hier besteht, fällt das letzte Glied fort, und wenn wir eine Aenderung der Argumente um die halbe Periode $L = 5678$ eintreten lassen,

auch das fünfte; es ergiebt sich:

$$(1|234)c_{2345}c_{1678}\Theta_{15}\Theta_{15\pi}+\cdots+(4|123)c_{1235}c_{4678}\Theta_{45}\Theta_{45\pi} = 0,$$

oder, wie wir kürzer schreiben können, da die einzelnen Glieder aus dem ersten durch Vertauschung des Index 1 mit 2, 3, 4 entstehen:

$$(1.)\qquad \sum_{1,2,3,4}(1|234)c_{2345}c_{1678}\Theta_{15}\Theta_{15\pi} = 0.$$

Nun ist aber nach den Schlussformeln des vorigen Abschnitts:

$$c_{2345}c_{1678} = \varepsilon[2345]^2 h(a_{2345})$$

und nach (4.) und (5.) im vorigen Paragraphen:

$$\Theta_{15}\Theta_{15\pi} = \delta[15]^2 h(u+a_1+a_5)R_1^2R_5^2\Phi^2.$$

Folglich erhalten wir:

$$\sum_{1,2,3,4}(1|234)[15]^2[2345]^2 h(u+a_1+a_5)h(a_2+a_3+a_4+a_5)R_1^2 = 0.$$

Wir stellen jetzt die Gleichung auf, die sich aus der Definition des Ausdrucks $[m]$ ergiebt:

$$[15][2345] = \frac{[5][12345]}{r_{12}r_{13}r_{14}}.$$

Der Factor $[5]^2[12345]^2$ wird dann allen Gliedern gemeinsam, und es ist:

$$r_{12}^2r_{13}^2r_{14}^2 = (1|234)h(a_1-a_2)h(a_1-a_3)h(a_1-a_4).$$

Daher folgt:

$$(2.)\qquad \sum_{1,2,3,4}\frac{h(u+a_1+a_5)h(a_2+a_3+a_4+a_5)R_1^2}{h(a_1-a_2)h(a_1-a_3)h(a_1-a_4)} = 0.$$

Von dieser Gleichung gelangen wir zu einer viel einfacheren auf folgende Weise. Bilden wir:

$$(3.)\qquad \sum_{1,2,3,4}\frac{h(u+a_1+x)h(a_2+a_3+a_4+x)R_1^2}{h(a_1-a_2)h(a_1-a_3)h(a_1-a_4)},$$

so sind die einzelnen Terme dieser Summe Thetafunctionen zweiten Grades von x, aus derjenigen Klasse, in der $h(x)$ ein ungerades Theta vom ersten Grade darstellt. Sie sind alle gleichändrig mit

$$h(x)h(x+u+a_1+a_2+a_3+a_4),$$

und die Gleichung (2.) zeigt, dass ihre Summe verschwindet für $x=a_5$. Ebenso muss aber die Summe verschwinden für $x=a_6$, a_7, a_8; folglich muss sie identisch 0 sein; denn eine Thetafunction zweiten Grades kann nicht für mehr als zwei incongruente Werthe verschwinden.

In Folge dessen ist der Ausdruck (3.) gleich 0 für jeden Werth von x. Wir setzen nun $x = -u - a_4$. Dann reducirt sich die Gleichung auf die dreigliedrige:

$$(4.)\qquad \sum_{1,2,3} \frac{h(a_2 + a_3 - u) R_1^2}{h(a_1 - a_2) h(a_1 - a_3)} = 0.$$

Hiermit vergleichen wir das Additionstheorem der Function $h(u)$:

$$\sum_{1,2,3} \frac{h(w - a_1) h(w' - a_1) h(a_2 + a_3 - w - w')}{h(a_1 - a_2) h(a_1 - a_3)} = 0.$$

Wir sehen daraus: Werden zwei Variable w und w' so eingeführt, dass

$$w + w' = u,$$

$$\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{h(w - a_2) h(w' - a_2)}{h(w - a_1) h(w' - a_1)}$$

ist, so folgt von selbst, dass auch:

$$\frac{R_3^2}{R_1^2} = \frac{h(w - a_3) h(w' - a_3)}{h(w - a_1) h(w' - a_1)}$$

ist. Da man für 3 auch jeden der folgenden Indices 4, 5 etc. setzen darf, so ist allgemein:

$$\frac{R_\alpha^2}{R_\beta^2} = \frac{h(w - a_\alpha) h(w' - a_\alpha)}{h(w - a_\beta) h(w' - a_\beta)}.$$

Eins der R können wir willkürlich wählen. Deshalb können wir allgemein für R_α^2 folgenden Ausdruck annehmen:

$$R_\alpha^2 = h(w - a_\alpha) h(w' - a_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \dots 8).$$

Für u ist jetzt die Summe $w + w'$ zu setzen.

Hiermit sind, was das Wichtigste ist, die beiden Hülfsgrössen w, w' eingeführt, durch die wir die *Abel*schen Functionen in dieser particulären Lösung auszudrücken haben. Die Darstellung von $\Theta_{\alpha\beta}$ und $\Theta_{\alpha\beta\pi}$ wird sehr einfach. Wir setzen

$$h(w - a_\alpha) = H_\alpha(w).$$

Das Vorzeichen von $\sqrt{H_\alpha(w')}$ werde willkürlich fixirt, und das von $\sqrt{H_\alpha(w)}$ so, dass:

$$R_\alpha = \sqrt{H_\alpha(w)} \sqrt{H_\alpha(w')}$$

ist. Ferner definiren wir:

$$\sqrt{H_{\alpha\beta}(w)} = \sqrt{H_\alpha(w)} \sqrt{H_\beta(w)},$$

$$\sqrt{H_{\alpha\beta\gamma}(w)} = \sqrt{H_\alpha(w)} \sqrt{H_\beta(w)} \sqrt{H_\gamma(w)}, \quad \text{etc.}$$

und ähnlich:

$$\sqrt{H_{\alpha\beta}(w')},\quad \sqrt{H_{\alpha\beta\gamma}(w')},\quad \text{etc.}$$

Dann ist:

$$R_\alpha R_\beta = \sqrt{H_{\alpha\beta}(w)}\sqrt{H_{\alpha\beta}(w')}.$$

Also bekommen wir:

$$(5.)\quad \begin{cases} \Theta_{\alpha\beta} = [\alpha\beta]f(w+w'+a_\alpha+a_\beta)\sqrt{H_{\alpha\beta}(w)}\sqrt{H_{\alpha\beta}(w')}\Phi, \\ \Theta_{\alpha\beta\pi} = \delta[\alpha\beta]g(w+w'+a_\alpha+a_\beta)\sqrt{H_{\alpha\beta}(w)}\sqrt{H_{\alpha\beta}(w')}\Phi, \end{cases}$$

oder, wie wir auch schreiben können, indem wir unter m irgend einen zweigliedrigen Index verstehen:

$$(6.)\quad \begin{cases} \Theta_m = [m]f(w+w'+a_m)\sqrt{H_m(w)}\sqrt{H_m(w')}\Phi, \\ \Theta_{m\pi} = \delta[m]g(w+w'+a_m)\sqrt{H_m(w)}\sqrt{H_m(w')}\Phi. \end{cases}$$

Dies ist die gesuchte Darstellung der Functionen der zweiten Gruppe.

§ 13.

Wir gehen zu einem neuen Gleichungssystem über, das freilich eigentlich schon in der Relation (1.) im vorigen Paragraphen enthalten ist. Diese viergliedrige Gleichung gilt unter der Voraussetzung, dass die Constante c und die Function Θ gleich 0 gesetzt werden; sie ist auch richtig, wenn c_π und Θ_π von 0 verschieden sind. Die Voraussetzungen sind daher, abgesehen von der etwas specielleren Vorzeichenbestimmung, symmetrisch in Bezug auf alle neun Indices 1, 2, ... 8 und π, und es ist erlaubt, π mit einem der primitiven Indices zu vertauschen. Je nachdem wir π mit 5, 6 oder 4 vertauschen, bekommen wir die drei verschiedenen Formeln:

$$(1.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{1,2,3,4}(1|234)c_{1678}c_{234\pi}\Theta_{15\pi}\Theta_{1\pi} = 0, \\ \sum\limits_{1,2,3,4}(1|234)c_{2345}c_{178\pi}\Theta_{15}\Theta_{156} = 0, \\ \sum\limits_{1,2,3}(1|23)c_{1678}c_{235\pi}\Theta_{15}\Theta_{145} = c_{1235}c_{678\pi}\Theta_{45\pi}\Theta_{5\pi}. \end{cases}$$

Die Summen sind überall so zu verstehen, dass aus dem hingeschriebenen Gliede die übrigen durch Vertauschung von 1 mit 2, 3 und 4, in der letzten Gleichung von 1 mit 2 und 3 entstehen.

Man sieht leicht, was dieses System leisten soll. Es kommen in ihm nur die Functionen der zweiten Gruppe $\Theta_{\alpha\beta}$ und $\Theta_{\alpha\beta\pi}$, die als bekannte Grössen zu betrachten sind, und die der dritten Gruppe $\Theta_{\alpha\beta\gamma}$, $\Theta_{\alpha\pi}$

vor. Man hat also ein System linearer Gleichungen zur Bestimmung dieser Unbekannten; und wir wollen bald erwähnen, dass dasselbe ausreicht, um alle Grössen $\Theta_{a\pi}$, $\Theta_{a\beta\gamma}$ linear durch zwei unter ihnen auszudrücken.

Damit aber in diesem etwas complicirten System wenigstens die Coefficienten eindeutige Functionen der Parameter werden, sondern wir bestimmte constante Factoren von den einzelnen Thetas ab. Und zwar von $\Theta_{a\beta}$ den Factor $[\alpha\beta]$, von $\Theta_{a\beta\pi}$ denselben Factor, aber noch behaftet mit dem Vorzeichen δ; ähnlich den Factor c_a von $\Theta_{a\pi}$, und $-\delta\varepsilon c_{a\beta\gamma\pi}$ von $\Theta_{a\beta\gamma}$:

$$(2.)\qquad \Theta_{a\beta} = [\alpha\beta]\sigma_{a\beta},\quad \Theta_{a\beta\pi} = \delta[\alpha\beta]\sigma_{a\beta\pi},$$

$$(3.)\qquad \Theta_{a\pi} = c_a\sigma_{a\pi},\quad \Theta_{a\beta\gamma} = -\delta\varepsilon c_{a\beta\gamma\pi}\sigma_{a\beta\gamma}.$$

Der Grund, aus dem wir von $\Theta_{a\beta\gamma}$ auch das Vorzeichen $-\delta\varepsilon$ absondern, liegt, wie man bald sehen wird, in der dritten Gleichung des Systems.

Nun setzen wir noch die Ausdrücke für die Theta-Nullwerthe ein:

$$-(\alpha) \text{ für } c_a,\quad (\alpha\beta\gamma) \text{ oder } (\varkappa\lambda\mu\nu\varrho) \text{ für } c_{a\beta\gamma\pi},$$
$$[\alpha\beta\gamma\delta]f(a_{a\beta\gamma\delta}) \text{ oder } \varepsilon[\varkappa\lambda\mu\nu]g(a_{\varkappa\lambda\mu\nu}) \text{ für } c_{a\beta\gamma\delta},$$

wobei allerdings, da jedesmal zwei Ausdrücke zur Verfügung stehen, eine zweckmässige Auswahl zu treffen ist. Dadurch erhalten wir zunächst folgende Umformung:

$$(4.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{1,2,3,4}(1|234)[2345][15](234)(1)g(a_{2345})\sigma_{15\pi}\sigma_{1\pi} = 0, \\ \sum\limits_{1,2,3,4}(1|234)[2345][15](156)(178)f(a_{2345})\sigma_{15}\sigma_{156} = 0, \\ \sum\limits_{1,2,3}(1|23)[2345][15](235)(145)g(a_{2345})\sigma_{15}\sigma_{145} \\ \qquad = [1235][45](12345)(5)f(a_{1235})\sigma_{45\pi}\sigma_{5\pi}. \end{cases}$$

Hier benutzen wir die Hülfsformeln, deren Beweis sich unmittelbar darbietet:

$$[2345][15] = \frac{[5][12345]}{r_{12}r_{13}r_{14}},$$

$$[1235][45] = \frac{[5][12345]}{r_{14}r_{24}r_{34}},$$

$$(234)(1) = \frac{(0)(1234)}{q_{12}q_{13}q_{14}},$$

$$(156)(178) = \frac{(56)(78)}{q_{12}q_{13}q_{14}},$$

$$(235)(145) = \frac{(5)(12345)}{q_{12}q_{13}q_{24}q_{34}}.$$

Die Ausdrücke im Zähler stellen überall Factoren dar, die allen Gliedern

gemeinsam sind und deshalb fortgelassen werden dürfen. Auf diese Weise werden die Gleichungen schon etwas einfacher:

$$\sum_{1,2,3,4}(1|234)\frac{g(a_{2345})\sigma_{15\pi}\sigma_{1\pi}}{r_{12}r_{13}r_{14}q_{12}q_{13}q_{14}} = 0,$$

$$\sum_{1,2,3,4}(1|234)\frac{f(a_{2345})\sigma_{15}\sigma_{156}}{r_{12}r_{13}r_{14}q_{12}q_{13}q_{14}} = 0,$$

$$\sum_{1,2,3}(1|23)\frac{g(a_{2345})\sigma_{15}\sigma_{145}}{r_{12}r_{13}r_{14}q_{12}q_{13}q_{24}q_{34}} = \frac{f(a_{1235})\sigma_{45\pi}\sigma_{5\pi}}{r_{14}r_{24}r_{34}},$$

und wenn wir nun noch die Formeln:

$$r_{\alpha\beta}q_{\alpha\beta} = (\alpha|\beta)f(a_\alpha - a_\beta), \quad \frac{r_{\alpha\beta}}{q_{\alpha\beta}} = g(a_\alpha - a_\beta)$$

anwenden, so ist die erste Reduction beendet:

$$(5.)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{1,2,3,4}\frac{g(a_2+a_3+a_4+a_5)\sigma_{15\pi}\sigma_{1\pi}}{f(a_1-a_2)f(a_1-a_3)f(a_1-a_4)} = 0, \\ \displaystyle\sum_{1,2,3,4}\frac{f(a_2+a_3+a_4+a_5)\sigma_{15}\sigma_{156}}{f(a_1-a_2)f(a_1-a_3)f(a_1-a_4)} = 0, \\ \displaystyle\sum_{1,2,3}\frac{g(a_2-a_4)g(a_3-a_4)g(a_2+a_3+a_4+a_5)\sigma_{15}\sigma_{145}}{f(a_1-a_2)f(a_1-a_3)} = f(a_1+a_2+a_3+a_5)\sigma_{45\pi}\sigma_{5\pi}. \end{cases}$$

Jetzt führen wir für $\sigma_{\alpha\beta}$ und $\sigma_{\alpha\beta\pi}$ ihre Ausdrücke ein:

$$\sigma_{\alpha\beta} = f(w+w'+a_\alpha+a_\beta)\sqrt{H_{\alpha\beta}(w)}\sqrt{H_{\alpha\beta}(w')}\Phi,$$

$$\sigma_{\alpha\beta\pi} = g(w+w'+a_\alpha+a_\beta)\sqrt{H_{\alpha\beta}(w)}\sqrt{H_{\alpha\beta}(w')}\Phi.$$

Gleichzeitig aber ersetzen wir $\sigma_{\alpha\pi}$, $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ durch bestimmte Hülfsgrössen Ψ, $\Psi_{\alpha\beta\gamma}$:

$$(6.)\quad \begin{cases} \sigma_{\alpha\pi} = \dfrac{\Psi_\alpha}{\sqrt{H_\alpha(w)}\sqrt{H_\alpha(w')}}\Phi, \\ \sigma_{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{\Psi_{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{H_{\alpha\beta\gamma}(w)}\sqrt{H_{\alpha\beta\gamma}(w')}}\Phi. \end{cases}$$

Dann erhalten wir zur Bestimmung der Grössen

$$\Psi_1, \quad \Psi_2, \quad \ldots \quad \Psi_8; \quad \Psi_{123}, \quad \ldots \quad \Psi_{678}$$

ein System linearer Gleichungen, deren Coefficienten eindeutige Functionen von w, w' und den Parametern sind:

$$(7.)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{1,2,3,4}\frac{g(a_2+a_3+a_4+a_5)g(w+w'+a_1+a_5)}{f(a_1-a_2)f(a_1-a_3)f(a_1-a_4)}\Psi_1 = 0, \\ \displaystyle\sum_{1,2,3,4}\frac{f(a_2+a_3+a_4+a_5)f(w+w'+a_1+a_5)}{f(a_1-a_2)f(a_1-a_3)f(a_1-a_4)}\Psi_{156} = 0, \\ \displaystyle\sum_{1,2,3}\frac{g(a_2-a_4)g(a_3-a_4)g(a_2+a_3+a_4+a_5)f(w+w'+a_1+a_5)}{f(a_1-a_2)f(a_1-a_3)}\Psi_{145} \\ \quad = f(a_1+a_2+a_3+a_5)g(w+w'+a_4+a_5)h(w-a_4)h(w'-a_4)\Psi_5. \end{cases}$$

Aus diesem System lassen sich Folgerungen ziehen, die sehr einfach sind und unmittelbar die richtige Darstellung von Ψ_α, $\Psi_{\alpha\beta\gamma}$ ergeben.

§ 14.

Betrachten wir zunächst die erste der drei Gleichungen, so muss diese richtig bleiben, wenn man a_5 durch a_6, a_7 oder a_8 ersetzt. Setzt man aber eine Veränderliche x für a_5, so werden alle Glieder elliptische Thetafunctionen zweiten Grades von x, die unter einander gleichändrig sind. Daher wäre ihre Summe eine Thetafunction zweiten Grades, die verschwindet für $x = a_5, a_6, a_7, a_8$. Dies ist nur möglich, wenn sie identisch 0 ist.

Ganz ebenso können wir in der zweiten Gleichung den vorkommenden Parameter a_5 wenigstens auch durch a_6 ersetzen. Ersetzen wir ihn wieder durch eine Veränderliche x, so hätten wir eine Thetafunction zweiten Grades, gleichändrig mit:

$$f(x)f(x+a_1+a_2+a_3+a_4+w+w'),$$

die für $x = a_5$ und $x = a_6$ verschwindet. Auch diese muss offenbar identisch 0 sein.

So erhalten wir statt der beiden ersten Gleichungen des Systems (7.) die folgenden:

$$\sum_{1,2,3,4} \frac{g(a_2+a_3+a_4+x)g(w+w'+a_1+x)}{f(a_1-a_2)f(a_1-a_3)f(a_1-a_4)} \Psi_1 = 0,$$

$$\sum_{1,2,3,4} \frac{f(a_2+a_3+a_4+x)f(w+w'+a_1+x)}{f(a_1-a_2)f(a_1-a_3)f(a_1-a_4)} \Psi_{156} = 0,$$

in denen x eine Grösse bedeutet, der wir einen willkürlichen Werth beilegen dürfen. Wir nehmen in der ersten $x = -w-w'-a_4+s$, in der zweiten $x = -w-w'-a_4$, wodurch beidemal das vierte Glied fortfällt, und kommen so zu den einfacheren Relationen:

$$(1.) \qquad \sum_{1,2,3} \frac{f(a_2+a_3-w-w')}{f(a_1-a_2)f(a_1-a_3)} \Psi_1 = 0,$$

$$(2.) \qquad \sum_{1,2,3} \frac{f(a_2+a_3-w-w')}{f(a_1-a_2)f(a_1-a_3)} \Psi_{156} = 0.$$

Die erste Gleichung würde erfüllt, wenn wir setzen:

$$\Psi_\alpha = f(w-a_\alpha)f(w'-a_\alpha);$$

aber ebenso durch die Function:

$$g(w-a_\alpha)g(w'-a_\alpha).$$

Wir können nun jedenfalls zwei Grössen M und N so bestimmen, dass die Gleichung:

$$\Psi_\alpha = Mf(w-a_\alpha)f(w'-a_\alpha)+Ng(w-a_\alpha)g(w'-a_\alpha)$$

gilt für $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$. Dann folgt aber aus (1.), dass sie auch gilt für $\alpha = 3$, folglich für jeden Index der Reihe 1, 2, ... 8.

Wir wollen für die Zwecke der nächsten Untersuchung die beiden Functionen:

$$(3.)\qquad \begin{cases} f(w-x)f(w'-x) = K(x), \\ g(w-x)g(w'-x) = L(x) \end{cases}$$

setzen, und den Ausdruck:

$$(4.)\qquad MK(x)+NL(x) \quad \text{mit} \quad \Psi(x)$$

bezeichnen. Aus der Gleichung (1.) folgt demnach, dass eine mit $K(x)$, $L(x)$ gleichändrige elliptische Thetafunction zweiten Grades, $\Psi(x)$, sich definiren lässt, die allgemein für $x = a_\alpha$ den Werth Ψ_α giebt:

$$(5.)\qquad \Psi_\alpha = \Psi(a_\alpha).$$

Ganz ebenso ergiebt sich aus (2.), dass für die Combination 56, und allgemein überhaupt für jede zweigliedrige Combination $\varkappa\lambda$, ein Ausdruck

$$(6.)\qquad \Psi_{\varkappa\lambda}(x) = M_{\varkappa\lambda}K(x)+N_{\varkappa\lambda}L(x)$$

definirt werden kann, so dass für jeden Parameter a_μ, der von $a_\varkappa$, a_λ verschieden ist:

$$(7.)\qquad \Psi_{\varkappa\lambda}(a_\mu) = \Psi_{\varkappa\lambda\mu}$$

wird.

Auf diese Weise entspringt aus den beiden ersten Formeln des Systems (7.), das am Schluss des vorigen Paragraphen aufgestellt ist, eine Reihe von Functionen:

$$\Psi(x), \quad \Psi_{12}(x), \quad \Psi_{13}(x), \quad \dots \quad \Psi_{78}(x),$$

deren jede linear aus $K(x)$, $L(x)$ gebildet ist, und die so beschaffen sind, dass allgemein:

$$\Psi(a_\alpha) \text{ für } \Psi_\alpha, \quad \Psi_{\beta\gamma}(a_\alpha) \text{ für } \Psi_{\alpha\beta\gamma}$$

gesetzt werden kann.

Die letzte Formel des Systems ist complicirter, aber ihr Kern ist eine einfache und wesentliche Beziehung zwischen $\Psi_{\varkappa\lambda}(x)$ und $\Psi(x)$.

In der Summe, die auf der linken Seite steht, ersetzen wir den Parameter a_4 durch $x-s$, und bezeichnen die Thetafunction dritten Grades,

die auf diese Weise entsteht, mit $C(x)$

$$C(x) = \sum_{1,2,3} \frac{f(x-a_2)f(x-a_3)f(x+a_2+a_3+a_5)f(w+w'+a_1+a_5)}{f(a_1-a_2)f(a_1-a_3)} \Psi_{145}.$$

Die Gleichung selbst sagt dann aus, dass:

$$(8.)\quad C(a_4+s) = f(a_1+a_2+a_3+a_5)g(w+w'+a_4+a_5)h(w-a_4)h(w'-a_4)\Psi_5$$

ist. Wir können aber die Function $C(x)$ — und damit auch den Werth $C(a_4+s)$ — noch in andrer Weise darstellen. Setzen wir $x = a_1$, so reducirt sich die Summe auf ihr erstes Glied, und zwar wird dieses:

$$C(a_1) = f(a_1+a_2+a_3+a_5)f(w+w'+a_1+a_5)\Psi_{145}.$$

Hieraus ziehen wir den Schluss, dass für alle Werthe von x:

$$(9.)\quad C(x) = f(a_1+a_2+a_3+a_5)f(w+w'+x+a_5)\Psi_{45}(x)$$

ist. Denn der Ausdruck rechts ist eine Thetafunction dritten Grades von derselben Beschaffenheit wie die einzelnen Glieder der Summe $C(x)$, und er stimmt dem Werthe nach mit $C(x)$ überein für $x = a_1, a_2, a_3$.

Aus der Vergleichung von (8.) und (9.) folgt:

$$\Psi_{45}(a_4+s) = h(w-a_4)h(w'-a_4)\Psi_5,$$

oder, da wir statt 4 und 5 irgend zwei Indices der Reihe 1 bis 8 nehmen können, und ausserdem:

$$h(w-x)h(w'-x) = K(x)L(x)$$

ist:

$$(10.)\quad \Psi_{\varkappa\lambda}(a_\varkappa+s) = K(a_\varkappa)L(a_\varkappa)\Psi(a_\lambda).$$

Denkt man sich die beiden Coefficienten M und N der Function $\Psi(x)$ als bekannt, so müssen sich durch diese Formel auch die Coefficienten von $\Psi_{\varkappa\lambda}(x)$ bestimmen lassen; denn sie giebt den Werth von $\Psi_{\varkappa\lambda}(x)$ für $x = a_\varkappa+s$ und für $x = a_\lambda+s$. Wir hatten angesetzt:

$$\Psi_{\varkappa\lambda}(x) = M_{\varkappa\lambda}K(x)+N_{\varkappa\lambda}L(x).$$

Daraus folgt:

$$\Psi_{\varkappa\lambda}(x+s) = M_{\varkappa\lambda}L(x)+N_{\varkappa\lambda}K(x).$$

Daher ist, nach (10.):

$$\Psi(a_\lambda) = \frac{M_{\varkappa\lambda}}{K(a_\varkappa)}+\frac{N_{\varkappa\lambda}}{L(a_\varkappa)}.$$

Wir können diese Formel auch so interpretiren, dass wir sagen: es ist

$$(11.)\quad \Psi(x) = \frac{M_{\varkappa\lambda}K(x)}{K(a_\varkappa)K(a_\lambda)}+\frac{N_{\varkappa\lambda}L(x)}{L(a_\varkappa)L(a_\lambda)}$$

für $x = a_\lambda$. Der Symmetrie des Ausdrucks wegen gilt dasselbe für $x = a_\varkappa$. Folglich ist die Gleichung (11.) richtig für jeden Werth von x. Dann muss aber:

$$M_{\varkappa\lambda} = K(a_\varkappa)K(a_\lambda)M,$$
$$N_{\varkappa\lambda} = L(a_\varkappa)L(a_\lambda)N$$

sein. Wir erhalten also:

$$(12.)\quad \begin{cases} \Psi(x) = MK(x)+NL(x), \\ \Psi_{\varkappa\lambda}(x) = MK(a_\varkappa)K(a_\lambda)K(x)+NL(a_\varkappa)L(a_\lambda)L(x), \\ \Psi_\varkappa = MK(a_\varkappa)+NL(a_\varkappa), \\ \Psi_{\varkappa\lambda\mu} = MK(a_\varkappa)K(a_\lambda)K(a_\mu)+NL(a_\varkappa)L(a_\lambda)L(a_\mu). \end{cases}$$

Hiermit sind die Folgerungen erschöpft, die sich aus dem linearen Gleichungssystem ziehen lassen; zur Bestimmung von M und N brauchen wir Gleichungen, die quadratisch sind in Bezug auf die Grössen $\Psi_\varkappa$, $\Psi_{\varkappa\lambda\mu}$.

§ 15.

Wir hatten, um die Thetarelationen leichter behandeln zu können, σ-Functionen an Stelle der Theta eingeführt, und zwar war

$$(1.)\quad \begin{cases} \Theta_{a\pi} = c_a\sigma_{a\pi}, \\ \Theta_{\alpha\beta\gamma} = -\delta\varepsilon c_{\alpha\beta\gamma\pi}\sigma_{\alpha\beta\gamma} \end{cases}$$

gesetzt worden. Weiter hatten wir an Stelle der σ Hülfsgrössen Ψ_α, $\Psi_{\alpha\beta\gamma}$ eintreten lassen:

$$(2.)\quad \begin{cases} \sigma_{a\pi} = \dfrac{\Psi_a}{\sqrt{H_a}\sqrt{H'_a}}\Phi, \\ \sigma_{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{\Psi_{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{H_{\alpha\beta\gamma}}\sqrt{H'_{\alpha\beta\gamma}}}\Phi. \end{cases}$$

Ich schreibe hier der Kürze wegen H_m statt $H_m(w)$, H'_m statt $H_m(w')$. Die Vorzeichen der Wurzelgrössen mit zusammengesetztem Index waren so fixirt, dass

$$\sqrt{H_{\alpha\beta\gamma}} = \sqrt{H_\alpha}\sqrt{H_\beta}\sqrt{H_\gamma}$$

ist. Die Grössen Ψ_α, $\Psi_{\alpha\beta\gamma}$ haben wir nun in bestimmte Formen gebracht. Es ist aber vortheilhaft, wenn wir $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ noch in einer etwas andern Form darstellen, die sich auf den zu $\alpha\beta\gamma$ complementären Index $\varkappa\lambda\mu\nu\varrho$ bezieht. Wir setzen:

$$(3.)\quad \sigma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\Psi_{\varkappa\lambda\mu\nu\varrho}}{\sqrt{H_{\varkappa\lambda\mu\nu\varrho}}\sqrt{H'_{\varkappa\lambda\mu\nu\varrho}}}\Phi.$$

Zwischen $\Psi_{\alpha\beta\gamma}$ und $\Psi_{\varkappa\lambda\mu\nu\varrho}$ besteht dann die Beziehung:

$$\Psi_{\varkappa\lambda\mu\nu\varrho} = \frac{\sqrt{H_\pi}\sqrt{H'_\pi}}{H_{\alpha\beta\gamma}H'_{\alpha\beta\gamma}}\Psi_{\alpha\beta\gamma},$$

und da:

$$H_{\alpha\beta\gamma}H'_{\alpha\beta\gamma} = K(a_\alpha)K(a_\beta)K(a_\gamma)L(a_\alpha)L(a_\beta)L(a_\gamma)$$

ist, so folgt:

$$\Psi_{\varkappa\lambda\mu\nu\varrho} = \frac{\sqrt{H_\pi}\sqrt{H'_\pi}M}{L(a_\alpha)L(a_\beta)L(a_\gamma)} + \frac{\sqrt{H_\pi}\sqrt{H'_\pi}N}{K(a_\alpha)K(a_\beta)K(a_\gamma)}.$$

Wir setzen nun:

$$(4.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{H_\pi}\sqrt{H'_\pi}N}{K(a_1)K(a_2)\dots K(a_8)} = M', \\[2ex] \dfrac{\sqrt{H_\pi}\sqrt{H'_\pi}M}{L(a_1)L(a_2)\dots L(a_8)} = N'. \end{cases}$$

Dann ergiebt sich:

$$\Psi_{\varkappa\lambda\mu\nu\varrho} = M'K(a_\varkappa)K(a_\lambda)\dots K(a_\varrho)+N'L(a_\varkappa)\dots L(a_\varrho).$$

Wir können also wieder $\Psi_{\varkappa\lambda\mu\nu\varrho}$ als den Werth auffassen, den eine Function

$$\Psi_{\varkappa\lambda\mu\nu}(x) = M'K(a_\varkappa)\dots K(x)+N'L(a_\varkappa)\dots L(x)$$

für $x = a_\varrho$ annimmt.

Hiervon machen wir Gebrauch bei der Thetarelation, die wir jetzt entwickeln. Es war schon in § 4 bemerkt, dass zwischen den vier Functionen:

$$\Theta_{145\pi}\Theta_{235\pi},\quad \Theta_{245\pi}\Theta_{315\pi},\quad \Theta_{345\pi}\Theta_{125\pi},\quad \Theta_5\Theta_{678\pi}$$

eine lineare Gleichung besteht, deren Coefficienten die Nullwerthe dieser vier Producte sind. Geht man zu den zugeordneten Functionen über, so bekommt man die Relation:

$$(5.)\qquad \sum_{1,2,3}(23|14)c_{145\pi}c_{235\pi}\Theta_{145}\Theta_{235} = c_5c_{678\pi}\Theta_{5\pi}\Theta_{678},$$

und wenn man die σ statt der Θ einführt:

$$\Sigma(23|14)(145)^2(235)^2\sigma_{145}\sigma_{235} = -\delta\varepsilon(5)^2(12345)^2\sigma_{5\pi}\sigma_{678}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{(145)(235)}{(5)(12345)} = \frac{1}{q_{12}q_{13}q_{24}q_{34}};$$

folglich:

$$\frac{(145)^2(235)^2}{(5)^2(12345)^2} = \frac{(23|14)}{e(a_1-a_2)e(a_1-a_3)e(a_2-a_4)e(a_3-a_4)}.$$

Demnach wird unsere Gleichung:

$$\sum_{1,2,3}\frac{\sigma_{145}\sigma_{235}}{e(a_1-a_2)e(a_1-a_3)e(a_2-a_4)e(a_3-a_4)} = -\delta\varepsilon\sigma_{5\pi}\sigma_{678}.$$

einzusetzen. So entsteht:

$$(2.)\quad \begin{cases} \sum_{1,2,3} \dfrac{f(a_1+a_4+a_5+a_6)f(a_1+a_4+a_7+a_8)}{f(a_1-a_2)f(a_1-a_3)g(a_2-a_4)g(a_3-a_4)}\,\Psi_1\Psi_{234} \\ = -\delta\varepsilon g(w+w'+a_5+a_6)g(w+w'+a_7+a_8)\sqrt{H_\pi}\sqrt{H'_\pi}. \end{cases}$$

Denn die Wurzelgrössen $\sqrt{H_1}$, $\sqrt{H_{234}}$ in den Nennern von $\sigma_{1\pi}$ und σ_{234} ergänzen sich mit den Factoren $\sqrt{H_{56}}$, $\sqrt{H_{78}}$ von $\sigma_{56\pi}$, $\sigma_{78\pi}$ zu $\sqrt{H_{12345678}}$ oder $\sqrt{H_\pi}$.

Wir müssen aber wieder suchen, einfachere Beziehungen herzuleiten. Setzen wir $a_5+a_6 = x$, $a_7+a_8 = y$, so erhalten wir eine Gleichung, in der nur die Parameter a_1, a_2, a_3, a_4 vorkommen; x und y selbst sind durch die Beziehung

$$(3.)\quad x+y+a_1+a_2+a_3+a_4 = s$$

mit ihnen verbunden. Denken wir uns hiernach y durch x ausgedrückt, so haben wir wieder eine Gleichung zwischen Thetafunctionen zweiten Grades von x, die für eine Anzahl von Werthen erfüllt ist: nämlich ebenso gut für $x = a_5+a_7$, a_5+a_8 etc., wie für a_5+a_6, und die deshalb identisch gelten muss.

Wir ziehen also aus (2.) die Folgerung, dass die Gleichung:

$$(4.)\quad \begin{cases} \sum_{1,2,3} \dfrac{f(a_1+a_4+x)f(a_1+a_4+y)}{f(a_1-a_2)f(a_1-a_3)g(a_2-a_4)g(a_3-a_4)}\,\Psi_1\Psi_{234} \\ = -\delta\varepsilon g(w+w'+x)g(w+w'+y)\sqrt{H_\pi}\sqrt{H'_\pi} \end{cases}$$

besteht für alle Werthe x, y, die der Gleichung (3.) genügen. Nun setzen wir, was dieser Bedingung entspricht, $x = -a_3-a_4$, $y = s-a_1-a_2$. Dann fällt das dritte Glied der Summe fort, und wir erhalten, bereits einfacher:

$$\sum_{1,2} \frac{\Psi_1\Psi_{234}}{f(a_1-a_2)g(a_3-a_4)} = -\delta\varepsilon g(a_3+a_4-w-w')f(a_1+a_2-w-w')\sqrt{H_\pi}\sqrt{H'_\pi},$$

oder:

$$(5.)\quad \begin{cases} \Psi_1\Psi_{234}-\Psi_2\Psi_{134} \\ = -\delta\varepsilon f(a_1-a_2)f(a_1+a_2-w-w')g(a_3-a_4)g(a_3+a_4-w-w')\sqrt{H_\pi}\sqrt{H'_\pi}. \end{cases}$$

Wir setzen nun $a_4 = x$. Dann ist $\Psi_{234} = \Psi_{23}(x)$, $\Psi_{134} = \Psi_{13}(x)$. Daher entsteht folgende Gleichung:

$$(6.)\quad \begin{cases} \Psi_1\Psi_{23}(x)-\Psi_2\Psi_{13}(x) \\ = -\delta\varepsilon f(a_1-a\;)f(a_1+a_2-w-w')g(x-a_3)g(x+a_3-w-w')\sqrt{H_\pi}\sqrt{H'_\pi}. \end{cases}$$

Hier sind die Ausdrücke auf beiden Seiten Thetafunctionen zweiten Grades

von x, die den Charakter von $K(x)$, $L(x)$ haben; und da die Formel gilt für $x = a_4, a_5, a_6$ etc., so gilt sie auch, wenn wir x als ganz willkürliche Grösse ansehen.

Deshalb dürfen wir auch den Werth w für x substituiren. Dann geht, weil $K(w) = 0$, $L(w) = g(w-w')$ ist,

$$\Psi_{23}(x) \quad \text{in} \quad NL(a_2)L(a_3)g(w-w'),$$
$$\Psi_{13}(x) \quad \text{in} \quad NL(a_1)L(a_3)g(w-w')$$

über, und es wird:

$$g(x-a_3)g(x+a_3-w-w') = g(w-a_3)g(w'-a_3) = L(a_3).$$

Der Factor $L(a_3)$ fällt demnach fort; man erhält statt (6.):

$$(7.)\quad (\Psi_1 L(a_2) - \Psi_2 L(a_1))Ng(w-w') = -\delta\varepsilon f(a_1-a_2)f(a_1+a_2-w-w')\sqrt{H_\pi}\sqrt{H'_\pi}.$$

Nun wiederholen wir noch ein letztes Mal denselben Schluss. Ψ_1 ist $\Psi(a_1)$. Statt a_1 dürfen wir wieder einen willkürlichen Werth x einsetzen:

$$(8.)\quad (\Psi(x)L(a_2) - \Psi_2 L(x))Ng(w-w') = -\delta\varepsilon f(x-a_2)f(x+a_2-w-w')\sqrt{H_\pi}\sqrt{H'_\pi}.$$

Wir wählen dafür $x = w+s$. Da

$$\Psi(w+s) = Mg(w-w'), \quad L(w+s) = 0,$$
$$f(w+s-a_2)f(w+s+a_2-w-w') = g(w-a_2)g(w'-a_2),$$
$$= L(a_2)$$

ist, so bekommen wir schliesslich das einfache Resultat:

$$(9.)\qquad MNg^2(w-w') = -\delta\varepsilon\sqrt{H_\pi}\sqrt{H'_\pi}.$$

Hält man dies zusammen mit der Formel:

$$(10.)\qquad \frac{M}{N} = -\delta\varepsilon\,\frac{L(a_1)\dots L(a_8)}{\sqrt{H_\pi}\sqrt{H'_\pi}},$$

die im vorigen Paragraphen entwickelt wurde, so folgt:

$$(11.)\qquad \begin{cases} M^2 g^2(w-w') = L(a_1)\dots L(a_8), \\ N^2 g^2(w-w') = K(a_1)\dots K(a_8). \end{cases}$$

Denn $H_\pi H'_\pi$ ist mit dem Product der 16 Factoren $K(a_\alpha)$, $L(a_\alpha)$ identisch.

§ 17.

Die Form der gewonnenen Resultate enthält noch Merkmale der durchgeführten Rechnung, die beseitigt werden müssen. Wir gehen von den Ψ zu den σ, von diesen zu den Theta zurück. Es war:

$$\Psi_a = MK(a_a)+NL(a_a),$$
$$\Psi_{a\beta\gamma} = MK(a_a)K(a_\beta)K(a_\gamma)+NL(a_a)L(a_\beta)L(a_\gamma),$$

ferner:

$$\sigma_{a\pi} = \frac{\Psi_a}{\sqrt{H_a}\sqrt{H'_a}}\Phi,$$
$$\sigma_{a\beta\gamma} = \frac{\Psi_{a\beta\gamma}}{\sqrt{H_{a\beta\gamma}}\sqrt{H'_{a\beta\gamma}}}\Phi,$$

wobei durchweg H_m für $H_m(w)$, H'_m für $H_m(w')$ gesetzt ist. Wir führen für den Augenblick acht Hülfsgrössen

$$(1.)\qquad \chi_a = \frac{L(a_a)}{\sqrt{H_a}\sqrt{H'_a}} \qquad (a=1,2,\dots 8)$$

und deren Zusammensetzungen

$$\chi_a\chi_\beta = \chi_{a\beta},\quad \chi_a\chi_\beta\chi_\gamma = \chi_{a\beta\gamma}\quad \text{etc.}$$

ein. Das Product aller acht Grössen ist hiernach als χ_π zu bezeichnen, und aus der Gleichung (7.) im vorigen Paragraphen folgt:

$$(2.)\qquad \frac{M}{N} = -\delta\varepsilon\chi_\pi.$$

Da $K(a_a)L(a_a) = H_a H'_a$ ist, so ist gleichzeitig:

$$(3.)\qquad \frac{K(a_a)}{\sqrt{H_a}\sqrt{H'_a}} = \frac{1}{\chi_a}.$$

Die Ausdrücke für $\sigma_{a\pi}$ und $\sigma_{a\beta\gamma}$ nehmen demnach folgende Form an:

$$\sigma_{a\pi} = \left(\frac{M}{\chi_a}+N\chi_a\right)\Phi,$$
$$\sigma_{a\beta\gamma} = \left(\frac{M}{\chi_{a\beta\gamma}}+N\chi_{a\beta\gamma}\right)\Phi,$$

oder, wenn wir für M, zufolge (2.), den Werth $-\delta\varepsilon\chi_\pi N$ einsetzen:

$$\sigma_{a\pi} = (\chi_a-\delta\varepsilon\chi_{a\pi})N\Phi,$$
$$\sigma_{a\beta\gamma} = (\chi_{a\beta\gamma}-\delta\varepsilon\chi_{a\beta\gamma\pi})N\Phi.$$

Nun war:

$$\Theta_{a\pi} = c_a\sigma_{a\pi},\quad \Theta_{a\beta\gamma} = -\delta\varepsilon\, c_{a\beta\gamma\pi}\sigma_{a\beta\gamma}.$$

Folglich ergiebt sich jetzt:

$$\Theta_{a\pi} = c_a(\chi_a-\delta\varepsilon\chi_{a\pi})N\Phi,$$
$$\Theta_{a\beta\gamma} = c_{a\beta\gamma\pi}(\chi_{a\beta\gamma\pi}-\delta\varepsilon\chi_{a\beta\gamma})N\Phi.$$

Diese beiden Formeln lassen sich offenbar in die einzige zusammenfassen:

$$(4.)\qquad \Theta_m = c_{m\pi}(\chi_{m\pi} - \delta\varepsilon\chi_m)N\Phi,$$

die für alle Functionen der dritten Gruppe gilt, gleichviel ob ihr Index aus drei oder sieben Elementen besteht.

Nach der letzten Gleichung im vorigen Paragraphen ist:

$$N^2 g^2(w-w') = \prod_{a=1}^{8} K(a_a)$$

oder, was dasselbe ist:

$$N^2 g^2(w-w') = \prod_{a=1}^{8} f(w-a_a)f(w'-a_a).$$

Bezeichnen wir das Product:

$$(5.)\qquad \prod_{a=1}^{8} f(w-a_a) \quad \text{mit} \quad A(w),$$

so wird:

$$N^2 g^2(w-w') = A(w)A(w'),$$

und, bei geeigneter Zeichenbestimmung der Wurzelgrössen:

$$(6.)\qquad N = \frac{\sqrt{A(w)}\sqrt{A(w')}}{g(w-w')}.$$

Ausser $A(w)$ führen wir, den einzelnen Combinationen entsprechend, eine Reihe von Functionen $A_m(w)$ ein, die aus $A(w)$ entspringen, indem man diejenigen Factoren $f(w-a_\mu)$, deren Index μ als Element in m enthalten ist, durch $g(w-a_\mu)$ ersetzt. Z. B.

$$A_1(w) = g(w-a_1)f(w-a_2)\dots f(w-a_8),$$
$$A_n(w) = g(w-a_1)g(w-a_2)\dots g(w-a_8).$$

Die Vorzeichenbestimmung von $\sqrt{A_m(w)}$ führen wir auf die von $\sqrt{H_m(w)}$ und von $\sqrt{A(w)}$ zurück. Es ist:

$$A_m(w) = \Pi g(w-a_\mu)\Pi f(w-a_\nu),$$
$$H_m(w) = \Pi g(w-a_\mu)\Pi f(w-a_\mu),$$
$$A(w) = \Pi f(w-a_\mu)\Pi f(w-a_\nu),$$

wobei μ die Elemente von m durchläuft, ν die übrigen Zahlen der Reihe 1 bis 8, also die Elemente von $m\pi$. Da hiernach:

$$A_m(w) = \frac{H_m(w)A(w)}{\Pi f^2(w-a_\mu)}$$

ist, so dürfen wir setzen:

$$(7.)\qquad \sqrt{A_m(w)} = \frac{\sqrt{H_m(w)}\sqrt{A(w)}}{\Pi f(w-a_\mu)}.$$

Ganz ebenso definiren wir $\sqrt{A_m(w')}$. Dann folgt:

$$\sqrt{A_m(w)}\sqrt{A_m(w')} = \frac{\sqrt{H_m(w)}\sqrt{H_m(w')}\sqrt{A(w)}\sqrt{A(w')}}{\Pi K(a_\mu)},$$

und da nach (3.):

$$\frac{\sqrt{H_\mu(w)}\sqrt{H_\mu(w')}}{K(a_\mu)} = \chi_\mu$$

ist, so ergiebt sich:

$$\sqrt{A_m(w)}\sqrt{A_m(w')} = \chi_m\sqrt{A(w)}\sqrt{A(w')}.$$

Mithin ist:

$$N\chi_m = \frac{\sqrt{A_m(w)}\sqrt{A_m(w')}}{g(w-w')}.$$

Wenn wir diesen Werth für $N\chi_m$ und den entsprechenden für $N\chi_{mn}$ in die Gleichung (4.) einsetzen, so haben wir den Ausdruck der Thetafunction in seiner einfachsten und klarsten Form:

$$(8.)\qquad \Theta_m = c_{mn}\frac{\sqrt{A_{mn}(w)}\sqrt{A_{mn}(w')}-\delta\varepsilon\sqrt{A_m(w)}\sqrt{A_m(w')}}{g(w-w')}\Phi.$$

Der wesentlichste Punkt in der Vorzeichenbestimmung, welche die Gleichung (7.) liefert, ist, dass stets:

$$(9.)\qquad \sqrt{A_m(w)}\sqrt{A_{mn}(w)} = \sqrt{H_n(w)}$$

ist. Speciell ist auch:

$$(10.)\qquad \sqrt{A(w)}\sqrt{A_n(w)} = \sqrt{H_n(w)}.$$

§ 18.

Eine analoge Darstellung besitzen die Theta der ersten Gruppe (Θ_α und $\Theta_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = \Theta_{\varkappa\lambda\mu n}$). Dies ergiebt sich durch eine leichte Transformation. Setzen wir für den Augenblick ganz allgemein:

$$\Theta_{mn} = \bar{\Theta}_m,$$

so bestehen zwischen den $\bar{\Theta}_m$ genau dieselben Beziehungen, wie zwischen den nicht überstrichenen Theta, und es vertauschen sich auf diese Weise die Functionen der ersten und dritten Gruppe. Bei der Herleitung der letzten Formel waren aber nicht die Thetarelationen allein benutzt worden,

sondern auch die Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \Theta_{\alpha\beta} = [\alpha\beta] f(w+w'+a_\alpha+a_\beta)\sqrt{H_{\alpha\beta}(w)}\sqrt{H_{\alpha\beta}(w')}\Phi, \\ \Theta_{\alpha\beta n} = \delta.[\alpha\beta] g(w+w'+a_\alpha+a_\beta)\sqrt{H_{\alpha\beta}(w)}\sqrt{H_{\alpha\beta}(w')}\Phi. \end{cases}$$

Hier führen wir, indem wir zu den überstrichenen Functionen übergehen, gleichzeitig für w' eine andere Variable:

$$w'' = w'+s$$

ein. Dadurch wird:

$$f(w+w'+a_\alpha+a_\beta) = -g(w+w''+a_\alpha+a_\beta),$$
$$g(w+w'+a_\alpha+a_\beta) = f(w+w''+a_\alpha+a_\beta).$$

$\sqrt{H_{\alpha\beta}(w)}$ bleibt ungeändert. $\sqrt{H_{\alpha\beta}(w')}$ war definirt als das Product

$$\sqrt{H_\alpha(w')}\sqrt{H_\beta(w')}.$$

Nun ist

$$h(w'-a_\alpha) = -h(w''-a_\alpha),$$

oder:

$$H_\alpha(w') = -H_\alpha(w'').$$

Wir können deshalb

$$\sqrt{H_\alpha(w'')} = i\sqrt{H_\alpha(w')}$$

setzen, und wenn wir dann $\sqrt{H_{\alpha\beta}(w'')}$, $\sqrt{H_{\alpha\beta\gamma}(w'')}$ etc. wieder als Producte definiren, die aus den Factoren

$$\sqrt{H_1(w'')}\dots\sqrt{H_8(w'')}$$

gebildet sind, so ist offenbar allgemein:

$$(2.)\quad \sqrt{H_m(w'')} = i^M\sqrt{H_m(w')},$$

wo M die Ordnungszahl des Index m bedeutet. Speciell ist

$$\sqrt{H_{\alpha\beta}(w'')} = -\sqrt{H_{\alpha\beta}(w')}.$$

Wir setzen noch $\Phi = -\delta.\Phi'$. Dann gehen die Gleichungen (1.) über in folgende:

$$(3.)\quad \begin{cases} \bar{\Theta}_{\alpha\beta} = [\alpha\beta] f(w+w''+a_\alpha+a_\beta)\sqrt{H_{\alpha\beta}(w)}\sqrt{H_{\alpha\beta}(w'')}\Phi', \\ \bar{\Theta}_{\alpha\beta n} = -\delta.[\alpha\beta] g(w+w''+a_\alpha+a_\beta)\sqrt{H_{\alpha\beta}(w)}\sqrt{H_{\alpha\beta}(w'')}\Phi'. \end{cases}$$

Der Haupt-Unterschied zwischen beiden Systemen besteht darin, dass $-\delta$ an die Stelle von δ getreten ist.

Bedeutet jetzt m irgend einen drei- oder siebengliedrigen Index, so

muss für $\bar{\Theta}_m = \Theta_{mn}$ dieselbe Formel gelten, die wir im vorigen Paragraphen für Θ_m aufgestellt haben, nur dass w'' an die Stelle von w', Φ' an die von Φ, $-\delta$ an die Stelle von $+\delta$ tritt. Wir haben demnach vorläufig:

$$\Theta_{mn} = c_{mn} \frac{\sqrt{A_{mn}(w)}\sqrt{A_{mn}(w'')} + \delta\varepsilon\sqrt{A_m(w)}\sqrt{A_m(w'')}}{g(w-w'')} \Phi'.$$

Statt Φ' setzen wir $-\delta.\Phi$, statt $g(w-w'')$ ferner $f(w-w')$, und m statt des Index mn. Die Formel wird dann:

$$(4.) \qquad \Theta_m = -\delta . c_m \frac{\sqrt{A_m(w)}\sqrt{A_m(w'')} + \delta\varepsilon\sqrt{A_{mn}(w)}\sqrt{A_{mn}(w'')}}{f(w-w')} \Phi;$$

sie gilt, wenn m ein einfacher Index oder eine fünffache Combination ist, und wir haben nur noch $\sqrt{A_m(w'')}$ und $\sqrt{A_{mn}(w'')}$ durch w' auszudrücken. Das ist sehr leicht zu sehen, dass

$$A_m(w'') = (-1)^M A_{mn}(w')$$

ist. Es handelt sich aber ausserdem um die Vorzeichen der Wurzeln.

Nach (8.) im vorigen Paragraphen ist zu setzen:

$$\sqrt{A_m(w'')} = \frac{\sqrt{H_m(w'')}\sqrt{A(w'')}}{\prod\limits_\mu f(w''-a_\mu)}$$

oder, zufolge (2.) in diesem Paragraphen:

$$\sqrt{A_m(w'')} = i^M \frac{\sqrt{H_m(w')}\sqrt{A(w'')}}{\prod\limits_\mu g(w'-a_\mu)}.$$

Ebenso ist:

$$\sqrt{A_{mn}(w')} = \frac{\sqrt{H_{mn}(w')}\sqrt{A(w')}}{\prod\limits_\nu f(w'-a_\nu)}.$$

Der Index μ durchläuft die Elemente von m, ν die übrig bleibenden Elemente. Dividirt man beide Gleichungen, so folgt:

$$\frac{\sqrt{A_m(w'')}}{\sqrt{A_{mn}(w')}} = i^M \frac{\sqrt{H_m(w')}\sqrt{A(w'')}\prod\limits_\nu f(w'-a_\nu)}{\sqrt{H_{mn}(w')}\sqrt{A(w')}\prod\limits_\mu g(w'-a_\mu)}.$$

Wir fügen im Zähler und Nenner das Product

$$\prod_\mu f(w'-a_\mu)$$

hinzu. Dadurch wird

$$\prod_\nu f(w'-a_\nu) \text{ zu } A(w'), \quad \prod_\mu g(w'-a_\mu) \text{ zu } H_m(w')$$

ergänzt; also folgt:

$$\frac{\sqrt{A_m(w'')}}{\sqrt{A_{m\pi}(w')}} = i^M \frac{\sqrt{A(w'')}\sqrt{A(w')}}{\sqrt{H_{m\pi}(w')}\sqrt{H_m(w')}}.$$

Nun ist:

$$\sqrt{H_{m\pi}(w')}\sqrt{H_m(w')} = \sqrt{H_\pi(w')} = \sqrt{A(w')}\sqrt{A_\pi(w')};$$

daher:

$$\frac{\sqrt{A_m(w'')}}{\sqrt{A_{m\pi}(w')}} = i^M \frac{\sqrt{A(w'')}}{\sqrt{A_\pi(w')}}.$$

Wie man unmittelbar erkennt, ist $A(w'')$ mit $A_\pi(w')$ identisch. Der Quotient beider Wurzeln kann deshalb nur ein Vorzeichen sein. Dieses Vorzeichen, das wir $\varkappa$ nennen, bleibt zwar unbestimmt, ist aber doch wenigstens von dem Index m unabhängig. So erkennen wir, dass allgemein zu setzen ist:

$$\sqrt{A_m(w'')} = \varkappa i^M \sqrt{A_{m\pi}(w')},$$

wo M die Ordnungszahl der Combination m bedeutet, während $\varkappa$ ein von m unabhängiges Vorzeichen ist.

In der Gleichung (4.) ist die Ordnungszahl des Index m congruent 1 modulo 4, die von $m\pi$ dagegen congruent -1. Demnach ergiebt sich hier:

$$\sqrt{A_m(w'')} = \varkappa i \sqrt{A_{m\pi}(w')},$$
$$\sqrt{A_{m\pi}(w'')} = -\varkappa i \sqrt{A_m(w')}.$$

Hiernach bekommen wir das Resultat:

$$(5.)\quad \Theta_m = -\varkappa.\delta.ic_m \frac{\sqrt{A_m(w)}\sqrt{A_{m\pi}(w')} - \delta\varepsilon\sqrt{A_{m\pi}(w)}\sqrt{A_m(w')}}{f(w-w')}\Phi.$$

Das Vorzeichen δ konnten wir willkürlich wählen. Wir haben es nur deshalb unbestimmt gelassen, um möglichst leicht den Uebergang von den Functionen der dritten Gruppe zu denen der ersten machen zu können. Aber auch über $\varkappa$ darf man willkürlich verfügen. Wenn man $\sqrt{H_\pi(w)}$ und $\sqrt{H_\pi(w')}$ durch die entgegengesetzten Werthe ersetzt, so würde $\varkappa$ in $-\varkappa$ übergehen.

Wir lassen deshalb jetzt $\varkappa$ und δ mit ε zusammenfallen. Ferner schreiben wir $\sqrt{B_m(w)}$ statt $\sqrt{A_{m\pi}(w)}$. $\sqrt{A_m(w)}$ und $\sqrt{B_m(w)}$ sind dann complementäre Factoren von $\sqrt{H_\pi(w)}$, ebenso wie $\sqrt{H_m(w)}$ und $\sqrt{H_{m\pi}(w)}$. Die Ausdrücke für die Theta der zweiten, dritten und ersten Gruppe lauten jetzt:

$$\text{(II.)}\quad \begin{cases} \Theta_m = [m]f(w+w'+a_m)\sqrt{H_m(w)}\sqrt{H_m(w')}\Phi, \\ \Theta_{m\pi} = \varepsilon[m]g(w+w'+a_m)\sqrt{H_m(w)}\sqrt{H_m(w')}\Phi, \end{cases} \quad (m=\alpha\beta);$$

$$\text{(III.)}\quad \Theta_m = c_{m\pi}\frac{\sqrt{B_m(w)}\sqrt{B_m(w')}-\sqrt{A_m(w)}\sqrt{A_m(w')}}{g(w-w')}\Phi, \quad (m=\alpha\pi \text{ und } \alpha\beta\gamma);$$

$$\text{(I.)}\quad \Theta_m = ic_m\frac{\sqrt{B_m(w)}\sqrt{A_m(w')}-\sqrt{A_m(w)}\sqrt{B_m(w')}}{f(w-w')}\Phi \quad (m=\alpha \text{ und } \alpha\beta\gamma\pi).$$

Es bleiben also nur die Theta der vierten Gruppe übrig. Deren Darstellung wird sich aber leicht ergeben, wenn wir vorher den Charakter der bereits gefundenen Ausdrücke genügend klarstellen.

§ 19.

Wir sondern den transcendenten Factor Φ ab, und ebenso die constanten Factoren $[m]$, $\varepsilon[m]$, $c_{m\pi}$, ic_m. Den Ausdruck, der übrig bleibt, nennen wir S_m. So ist für die Indices der zweiten Gruppe ($M\equiv 2$ (mod. 4)):

$$\text{(1.)}\quad \begin{cases} S_{\alpha\beta} = f(w+w'+a_\alpha+a_\beta)\sqrt{H_{\alpha\beta}(w)}\sqrt{H_{\alpha\beta}(w')}, \\ S_{\alpha\beta\pi} = g(w+w'+a_\alpha+a_\beta)\sqrt{H_{\alpha\beta}(w)}\sqrt{H_{\alpha\beta}(w')}; \end{cases}$$

ferner:

$$\text{(2.)}\quad S_m = \frac{\sqrt{B_m(w)}\sqrt{B_m(w')}-\sqrt{A_m(w)}\sqrt{A_m(w')}}{g(w-w')} \quad \text{für} \quad M\equiv 3,$$

$$\text{(3.)}\quad S_m = \frac{\sqrt{B_m(w)}\sqrt{A_m(w')}-\sqrt{A_m(w)}\sqrt{B_m(w')}}{f(w-w')} \quad \text{für} \quad M\equiv 1 \text{ (mod. 4)}.$$

In Bezug auf die Vorzeichen der Wurzelgrössen ist hier allein von Wichtigkeit, dass stets:

$$\text{(4.)}\quad \sqrt{A_m(w)}\sqrt{B_m(w)} = \sqrt{H_\pi(w)}$$

ist, ebenso wie:

$$\text{(5.)}\quad \sqrt{H_m(w)}\sqrt{H_{m\pi}(w)} = \sqrt{H_\pi(w)}.$$

Dies gilt für beide Variabeln w und w'.

Wir betrachten nur w als variabel, w' dagegen als constant, und setzen:

$$\text{(6.)}\quad \begin{cases} e^2(w) = x, \quad \dfrac{\sqrt{H_\pi(w)}}{h^4(w)} = y; \\ e^2(w') = x', \quad \dfrac{\sqrt{H_\pi(w')}}{h^4(w')} = y'. \end{cases}$$

x ist dann mit y durch eine algebraische Gleichung verbunden, die ein

bestimmtes Gebilde vom Range 9 definirt; (x, y) ist ein variabler, x', y' ein fester Punkt des Gebildes. Es ist klar, dass alle eindeutigen elliptischen Functionen, welche die Perioden von $e^2(w)$ haben — wir nennen diese schlechthin elliptische Functionen — sich rational durch x und y, sogar durch x und y^2 ausdrücken lassen.

Wir nennen ferner zwei Functionen von w äquivalent, wenn ihr Quotient eine rationale Function von x und y ist.

So sind z. B. für einen Index m von ungerader Ordnungszahl $\sqrt{A_m(w)}$ und $\sqrt{B_m(w)}$ äquivalente Grössen. Denn der Quotient

$$\frac{A_m(w)}{h^4(w)} = \frac{\prod\limits_{\mu} g(w-a_\mu)\prod\limits_{\nu} f(w-a_\nu)}{f^4(w)g^4(w)}$$

ist eine elliptische Function, und daher $A_m(w) \backsim h^4(w)$. Es ist aber $h^4(w) \backsim \sqrt{H_n(w)}$, wie aus (6.) folgt, und nach (4.)

$$\sqrt{H_n(w)} = \sqrt{A_m(w)}\sqrt{B_m(w)}.$$

Folglich:

$$\text{(7.)} \qquad \sqrt{A_m(w)} \backsim \sqrt{B_m(w)} \qquad (M \equiv 1 \pmod{2}).$$

Ist die Anzahl der Elemente von m eine gerade, so findet diese Aequivalenz nicht statt, sondern es ist:

$$\text{(8.)} \qquad \frac{\sqrt{A_m(w)}}{\sqrt{B_m(w)}} \backsim e(w) \qquad (M \equiv 0 \pmod{2}).$$

Denn in diesem Falle ist die Summe der acht Werthe, wofür $A_m(w)$ verschwindet, nicht congruent 0, sondern congruent der halben Periode s.

Indem man dies berücksichtigt, folgt aus (2.) und (3.):

$$\text{(9.)} \qquad S_m \backsim \frac{\sqrt{A_m(w)}}{g(w-w')} \quad \text{für} \quad M \equiv 3 \pmod{4},$$

$$\text{(10.)} \qquad S_m \backsim \frac{\sqrt{A_m(w)}}{f(w-w')} \quad \text{für} \quad M \equiv 1 \pmod{4}.$$

In analoge Form lässt sich aber auch der Aequivalenzwerth eines S_m bringen, das der zweiten Gruppe angehört. Zufolge (7.), § 17 ist:

$$\sqrt{H_{\alpha\beta}(w)} = f(w-a_\alpha)f(w-a_\beta)\frac{\sqrt{A_{\alpha\beta}(w)}}{\sqrt{A(w)}}.$$

Daher ist:

$$S_{\alpha\beta} = C.f(w-a_\alpha)f(w-a_\beta)f(w+w'+a_\alpha+a_\beta)\frac{\sqrt{A_{\alpha\beta}(w)}}{\sqrt{A(w)}},$$

wo C nicht von w abhängt. Dies führt zu der Aequivalenz:

$$S_{\alpha\beta} \sim \frac{f^4(w)}{f(w-w')} \frac{\sqrt{A_{\alpha\beta}(w)}}{\sqrt{A(w)}},$$

und ebenso ist:

$$S_{\alpha\beta n} \sim \frac{f^4(w)}{g(w-w')} \frac{\sqrt{A_{\alpha\beta}(w)}}{\sqrt{A(w)}}.$$

Da aber nach (8.):

$$\sqrt{A_{\alpha\beta}(w)} \sim e(w)\sqrt{A_{\alpha\beta n}(w)},$$

also:

$$\frac{\sqrt{A_{\alpha\beta}(w)}}{g(w-w')} \sim \frac{\sqrt{A_{\alpha\beta n}(w)}}{f(w-w')}$$

ist, so hat man in beiden Fällen:

$$(11.)\qquad S_m \sim \frac{f^4(w)}{f(w-w')} \frac{\sqrt{A_m(w)}}{\sqrt{A(w)}} \qquad (M \equiv 2 \pmod 4).$$

Die drei Aequivalenzen (9.), (10.), (11.) fassen wir in eine zusammen. Es sei

$$(12.)\qquad \frac{f^4(w)}{\sqrt{A(w)}} = \varrho.$$

Dann ist ϱ^2 zwar eindeutig, aber noch keine elliptische Function der betrachteten Klasse, sondern äquivalent $e(w)$. Erst ϱ^4 ist rational in x und y. Da $\varrho^2 \sim e(w)$ ist, so kann man

$$\frac{1}{g(w-w')} \sim \frac{\varrho^2}{f(w-w')}$$

setzen. Dadurch lassen sich die drei Formeln so darstellen:

$$S_m \sim \frac{\sqrt{A_m(w)}}{f(w-w')} \qquad \text{für} \quad M \equiv 1,$$

$$S_m \sim \frac{\sqrt{A_m(w)}}{f(w-w')}\varrho \qquad \text{für} \quad M \equiv 2,$$

$$S_m \sim \frac{\sqrt{A_m(w)}}{f(w-w')}\varrho^2 \qquad \text{für} \quad M \equiv 3 \pmod 4.$$

Es ist also in jedem der drei Fälle:

$$(13.)\qquad S_m \sim \frac{\sqrt{A_m(w)}}{\varrho f(w-w')}\varrho^M.$$

Wir setzen nun:

$$(14.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{A_m(w)}}{\sqrt{A(w)}}\varrho^M = \xi_m, \\[2ex] \dfrac{\sqrt{A(w)}}{\varrho f(w-w')} = \sigma, \end{cases}$$

endlich bleiben. Die Grössen S_m der zweiten Gruppe werden daher nie unendlich, die der dritten nur dann, wenn $g(w-w')$ verschwindet, und die der ersten nur, wenn $f(w-w')=0$ wird. Diese Punkte können durch die Werthe $w=w'$ und $w=w'+s$ charakterisirt werden. Dazu gehört jedesmal nur ein Werth von x, $x=x'$ oder $\frac{1}{x'}$, aber zwei von y, y' und $-y'$. Offenbar wird aber ein S_m der ersten Gruppe nur unendlich im Punkte $(x,y)=(x',-y')$; denn für $(x,y)=(x',y')$ verschwindet ausser dem Nenner auch der Zähler. Ebenso wird ein S_m der dritten Gruppe unendlich für $(x,y)=\left(\frac{1}{x'},y'\right)$, aber nicht für $(x,y)=\left(\frac{1}{x'},-y'\right)$. Denn setzen wir $x=\frac{1}{x'}$, $y=-y'$, oder, was dasselbe ist:

$$w=w'+s,\quad \sqrt{H_n(w)}=-\sqrt{H_n(w')},$$

so folgt hieraus:

$$\begin{aligned}\sqrt{A_m(w)}\sqrt{B_m(w)} &= -\sqrt{A_m(w')}\sqrt{B_m(w')},\\ A_m(w) &= -B_m(w');\end{aligned}$$

mithin:

$$\frac{\sqrt{B_m(w)}}{\sqrt{A_m(w)}}=\frac{\sqrt{A_m(w')}}{\sqrt{B_m(w')}},$$

oder:

$$\sqrt{B_m(w)}\sqrt{B_m(w')}-\sqrt{A_m(w)}\sqrt{A_m(w')} = 0.$$

Man sieht also, dass im Punkte $\left(\frac{1}{x'},-y'\right)$ für die S der dritten Gruppe Zähler und Nenner zugleich verschwinden; der Quotient nimmt einen endlichen Werth an.

Wir wollen $(x',-y')$ den ersten, $\left(\frac{1}{x'},y'\right)$ den zweiten singulären Punkt nennen. Bezeichnen wir überhaupt zwei Werthepaare (x,y) und $\left(\frac{1}{x},-y\right)$ als correspondirende, so sind auch die beiden singulären Punkte correspondirende des Gebildes.

Wir fassen die Resultate dieses Paragraphen in einem Satz zusammen, der überhaupt den Kern der ganzen Untersuchung enthält:

Die einzelnen S_m oder $\frac{\Theta_m}{\Phi}$ sind Functionen mit dem Aequivalenzwerth $\sigma\xi_m$, die nur unendlich werden im Punkte $(x',-y')$ und dem correspondirenden $\left(\frac{1}{x'},y'\right)$. Und zwar werden die Grössen S_m der zweiten

Gruppe gar nicht unendlich, die der ersten nur für $(x, y) = (x', -y')$, die der dritten nur für $(x, y) = \left(\frac{1}{x'}, y'\right)$. Der Vollständigkeit wegen fügen wir hinzu, was sich freilich erst im nächsten Paragraphen ergiebt: Die S_m der vierten Gruppe werden in beiden Punkten unendlich.

Der Factor σ hat den Ausdruck:

$$\sigma = \frac{f^4(w)}{g(w-w')};$$

es ist ferner:

$$\xi_m = \frac{\sqrt{A_m(w)}}{\sqrt{A(w)}}\varrho^M, \quad \varrho = \frac{f^4(w)}{\sqrt{A(w)}},$$

wobei M die Ordnungszahl des Index m bedeutet. Diese Grösse ξ_m ist die Quadratwurzel aus einer rationalen Function von (x, y); sie lässt sich auffassen als Product derjenigen primitiven Wurzelgrössen

$$\xi_\mu = \frac{\sqrt{A_\mu(w)}}{\sqrt{A(w)}}\varrho = \frac{\varrho}{\sqrt{e(w-a_\mu)}},$$

deren Index μ als Element in der Combination m vorkommt.

Eine Folge dieses Satzes ist natürlich, dass alle *Abel*schen Functionen

$$\frac{\Theta_p \Theta_q}{\Theta_r \Theta_{pqr}}$$

rationale Functionen von (x, y) werden.

§ 20.

Dass die Theta der vierten Gruppe — die Functionen $\Theta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — von dem Satz nicht ausgeschlossen sind, erkennen wir deutlich, wenn wir eine letzte Thetarelation betrachten:

$$(1.) \qquad \sum_{1,2,3,4} (1|234) c_{1567} c_{1568} \Theta_1 \Theta_{178} = c_7 c_8 \Theta_{56} \Theta_{5678}.$$

Man kann geradezu sagen, dass hierdurch eine Darstellung von Θ_{5678}, freilich in sehr unsymmetrischer Form, gegeben ist, da alle anderen Grössen, die in der Gleichung vorkommen, bekannt sind. Wir denken uns wieder von Θ_{5678} den Factor Φ und eine vorläufig noch unbestimmte Constante abgesondert; der Rest werde mit S_{5678} bezeichnet.

Jedenfalls geht aus der Gleichung (1.) hervor, dass sich S_{5678} linear und homogen durch:

$$\frac{S_1 S_{178}}{S_{56}} \cdots \frac{S_4 S_{478}}{S_{56}}$$

ausdrücken lässt. Diese einzelnen Quotienten aber haben alle den Aequivalenzwerth $\sigma\xi_{5678}$, und daher gilt von S_{5678} dasselbe.

Ferner wird S_1 nur in dem ersten, S_{178} nur im zweiten singulären Punkte unendlich. Also kann $S_{56}S_{5678}$ auch nur in diesen beiden Punkten unendlich werden. Ebenso darf dies von dem Product $S_{78}S_{5678}$ behauptet werden, und da S_{56}, S_{78} keinen gemeinsamen Nullpunkt besitzen, so kann S_{5678} selbst an keiner anderen Stelle unendlich werden. Demnach sind auch die Grössen S_m der vierten Gruppe zu definiren als Functionen mit dem Aequivalenzwerth $\sigma\xi_m$, die nur in den beiden singulären Punkten, und zwar nur von der ersten Ordnung unendlich werden.

Hiernach suchen wir S_m zu bestimmen. Es sei m irgend ein viergliedriger Index. Multipliciren wir S_m noch mit $h(w-w')$:

$$S_m h(w-w') = X_m,$$

so kann X_m nirgends unendlich werden und muss sogar verschwinden für $(x, y) = (x', y')$ und $\left(\frac{1}{x'}, -y'\right)$, da $h(w-w')$ die vier Nullpunkte:

$$(x', y'), \quad (x', -y'), \quad \left(\frac{1}{x'}, y'\right), \quad \left(\frac{1}{x'}, -y'\right)$$

besitzt. Da

$$\sigma = \frac{f^4(w)}{g(w-w')}$$

ist, so ist:

$$X_m \backsim f^4(w) f(w-w') \xi_m.$$

Hier ist:

$$\xi_m \backsim \frac{\sqrt{A_m(w)}}{\sqrt{A(w)}},$$

weil $M = 4$, und $\varrho^4 \backsim 1$ ist. Ferner wenden wir wieder die Formel (7.) in § 17 an:

$$\frac{\sqrt{A_m(w)}}{\sqrt{A(w)}} = \frac{\sqrt{H_m(w)}}{\prod\limits_\mu f(w-a_\mu)}.$$

Dann folgt:

$$X_m \backsim \frac{f^4(w) f(w-w')}{\prod\limits_\mu f(w-a_\mu)} \sqrt{H_m(w)}.$$

Das Product im Nenner besteht aus vier Factoren, die den einzelnen Elementen der Combination m entsprechen. Der ganze Ausdruck, der vor

Wir setzen dementsprechend:

$$\lambda = \sqrt{H_{mn}(w')}, \quad \mu = \sqrt{H_m(w')}.$$

Hierdurch wird:

$$S_m = \frac{f(w-w'+a_m)\sqrt{H_m(w)}\sqrt{H_{mn}(w')}+f(w-w'-a_m)\sqrt{H_{mn}(w)}\sqrt{H_m(w')}}{h(w-w')}.$$

Den constanten Factor, um den sich Θ_m von $S_m\Phi$ unterscheidet, nennen wir vorläufig C_m:

$$\Theta_m = C_m S_m \Phi.$$

Dieser Factor lässt sich am einfachsten auf folgende Art bestimmen. In dem ersten singulären Punkte $(x, y) = (x', -y')$ werden alle Grössen S_m der ersten und vierten Gruppe — also alle diejenigen, die geraden Thetafunctionen entsprechen, unendlich, während die übrigen endliche Werthe bekommen. Wir schliessen hieraus, dass dem Punkte $(x, y) = (x', -y')$ ein Werthsystem der Argumente entspricht, das entweder Null oder eine ganze Periode ist, und da wir zu den Argumenten irgend eine ganze Periode hinzufügen können, so nehmen wir an, dass sie im Punkte $(x, y) = (x', -y')$ verschwinden. Daraus folgt aber, dass, wenn Θ_m, Θ_n irgend zwei gerade Theta bedeuten, der Quotient

$$\frac{\Theta_m}{\Theta_n} \text{ sich auf } \frac{c_m}{c_n}$$

reducirt, wenn wir $w = w'$, $\sqrt{H_n(w)} = -\sqrt{H_n(w')}$ werden lassen. Nun nehmen wir für Θ_m irgend eine Function der vierten, für Θ_n eine Function der ersten Gruppe:

$$\Theta_n = ic_n \frac{\sqrt{B_n(w)}\sqrt{A_n(w')} - \sqrt{A_n(w)}\sqrt{B_n(w')}}{f(w-w')}\Phi.$$

Der Quotient der Nenner:

$$\frac{h(w-w')}{f(w-w')} = g(w-w')$$

wird Eins für $w = w'$, $\sqrt{H_n(w)} = -\sqrt{H_n(w')}$. Im Zähler von S_n ebenso wie von S_m wird der zweite Theil gleich dem ersten; wir bekommen also:

$$\frac{c_m}{c_n} = \frac{C_m}{ic_n} \frac{f(a_m)\sqrt{H_m(w')}\sqrt{H_{mn}(w')}}{\sqrt{B_n(w')}\sqrt{A_n(w')}},$$

oder:

$$c_m = -iC_m f(a_m).$$

Da nun c_m selbst gleich $[m]f(a_m)$ ist, so folgt:

$$C_m = i[m].$$

Wir stellen jetzt die Ausdrücke zusammen, die wir für die Theta der vier Gruppen gefunden haben:

Erste Gruppe. $M = 1$ oder 5:

$$\Theta_m = ic_m S_m \Phi,$$

$$S_m = \frac{\sqrt{B_m(w)}\sqrt{A_m(w')} - \sqrt{A_m(w)}\sqrt{B_m(w')}}{f(w-w')}.$$

Zweite Gruppe. $M = 2$:

$$\Theta_m = [m] S_m \Phi,$$

$$\Theta_{m\pi} = \varepsilon [m] S_{m\pi} \Phi,$$

$$S_m = f(w+w'+a_m)\sqrt{H_m(w)}\sqrt{H_m(w')},$$

$$S_{m\pi} = g(w+w'+a_m)\sqrt{H_m(w)}\sqrt{H_m(w')}.$$

Dritte Gruppe. $M = 3$ oder 7:

$$\Theta_m = c_{m\pi} S_m \Phi,$$

$$S_m = \frac{\sqrt{B_m(w)}\sqrt{B_m(w')} - \sqrt{A_m(w)}\sqrt{A_m(w')}}{g(w-w')}.$$

Vierte Gruppe. $M = 4$:

$$\Theta_m = i[m] S_m \Phi,$$

$$S_m = \frac{f(w-w'+a_m)\sqrt{H_m(w)}\sqrt{H_{m\pi}(w')} - f(w'-w+a_m)\sqrt{H_{m\pi}(w)}\sqrt{H_m(w')}}{h(w-w')}.$$

Dritter Abschnitt.

§ 21.

Wir suchen jetzt die Argumente u, u', u'', u''' als Functionen von w und w' darzustellen. Diese Aufgabe hat gewisse Schwierigkeiten, obgleich ihre Lösung einfach und fast zu errathen ist. Wir machen den Umweg, dass wir zunächst die Ableitungen von Θ und Θ_π betrachten. Sind die Verhältnisse dieser acht Grössen:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial u} \cdots \frac{\partial\Theta}{\partial u'''}, \quad \frac{\partial\Theta_\pi}{\partial u} \cdots \frac{\partial\Theta_\pi}{\partial u'''}$$

als Functionen von w, w' bekannt, so sind durch die Gleichungen $d\Theta = 0$,

$d\Theta_\pi = 0$ wenigstens zwei Beziehungen zwischen den gesuchten vier Differentialen gegeben.

Wir denken uns u, u', u'', u''' als unabhängige Veränderliche, und bilden die Differenz:

$$D = \Theta_{78}\frac{\partial\Theta}{\partial u} - \Theta\frac{\partial\Theta_{78}}{\partial u}.$$

Dann lässt sich D linear durch die zur Periode 78 gehörenden Thetaproducte ausdrücken, und zwar durch die, welche gerade Functionen sind. Es giebt acht linear unabhängige Functionen dieser Art. Ein solches unabhängiges System ist z. B. folgendes:

$$(1.)\qquad \Theta_7\Theta_8,\quad \Theta_{17}\Theta_{18},\quad \ldots\quad \Theta_{67}\Theta_{68},\quad \Theta_{\pi 7}\Theta_{\pi 8}.$$

Werden die Argumente gleich Null oder gleich einer der sieben halben Perioden 1, 2, ... 6, π gesetzt, so wird jedesmal eins der acht Producte von 0 verschieden, während die übrigen verschwinden. Also kann zwischen ihnen keine lineare Gleichung bestehen, und wir dürfen die Reihe (1.) zur Darstellung von D verwenden. Der erste und letzte Coefficient sind aber Null, weil D verschwindet, wenn die Argumente gleich Null oder gleich der halben Periode π gesetzt werden. Demnach wird:

$$(2.)\qquad \Theta_{78}\frac{\partial\Theta}{\partial u} - \Theta\frac{\partial\Theta_{78}}{\partial u} = \sum_{\alpha=1}^{6} K_\alpha\Theta_{\alpha 7}\Theta_{\alpha 8}.$$

Durch die halbe Periode π geht diese Gleichung über in:

$$(3.)\qquad \Theta_{78\pi}\frac{\partial\Theta_\pi}{\partial u} - \Theta_\pi\frac{\partial\Theta_{78\pi}}{\partial u} = -\sum_{\alpha=1}^{6} K_\alpha\Theta_{\alpha 7\pi}\Theta_{\alpha 8\pi}.$$

Das negative Zeichen kommt daher, dass der Quotient:

$$\frac{\Theta_{\alpha 7}\Theta_{\alpha 8}}{\Theta\Theta_{78}} \quad\text{in}\quad (\pi, \alpha 7, \alpha 8)\frac{\Theta_{\alpha 7\pi}\Theta_{\alpha 8\pi}}{\Theta_\pi\Theta_{78\pi}}$$

übergegangen ist; es ist aber $(\pi, \alpha 7, \alpha 8) = -1$, weil die Perioden $\alpha 7$, $\alpha 8$ azygetisch sind.

Wir setzen nun $\Theta = 0$, $\Theta_\pi = 0$. Dann erhalten wir aus (2.) und (3.):

$$\frac{\partial\Theta}{\partial u} = \sum_{\alpha=1}^{6} K_\alpha\frac{\Theta_{\alpha 7}\Theta_{\alpha 8}}{\Theta_{78}},$$

$$\frac{\partial\Theta_\pi}{\partial u} = -\sum_{\alpha=1}^{6} K_\alpha\frac{\Theta_{\alpha 7\pi}\Theta_{\alpha 8\pi}}{\Theta_{78\pi}},$$

und die Ausdrücke auf der rechten Seite werden, wenn wir für $\Theta_{\alpha\beta}$, $\Theta_{\alpha\beta\pi}$ ihre Werthe einführen und den Factor Φ absondern, eindeutige und symme-

trische Functionen von w, w'. Es werde gesetzt:

$$(4.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Theta}{\partial u} = A(w, w')\Phi, \\ \dfrac{\partial \Theta_\pi}{\partial u} = \varepsilon B(w, w')\Phi. \end{cases}$$

Dann sind A und B durch die Summen gegeben:

$$A(w, w') = \sum_{\alpha=1}^{6} K_\alpha \frac{[\alpha 7][\alpha 8]}{[78]} \frac{h(w-a_\alpha)h(w'-a_\alpha)f(w+w'+a_\alpha+a_7)f(w+w'+a_\alpha+a_8)}{f(w+w'+a_7+a_8)},$$

$$B(w, w') = -\sum_{\alpha=1}^{6} K_\alpha \frac{[\alpha 7][\alpha 8]}{[78]} \frac{h(w-a_\alpha)h(w'-a_\alpha)g(w+w'+a_\alpha+a_7)g(w+w'+a_\alpha+a_8)}{g(w+w'+a_7+a_8)}.$$

Wir erkennen aus dieser Darstellung Folgendes:

Erstens sind $A(w, w')$, $B(w, w')$ Functionen, die nie unendlich werden. Es treten zwar $f(w+w'+a_7+a_8)$, $g(w+w'+a_7+a_8)$ als Nenner auf; da aber A und B bei der Vertauschung der Indices 7, 8 mit den übrigen 1, 2, ... 6 ungeändert bleiben, so müssen die Zähler durch diese Nenner theilbar sein.

Zweitens ist, wenn wir A und B als abhängig von w allein auffassen:

$$(5.)\quad \begin{cases} A(w, w') \frown\!\!\smile h(w)f(w+w'), \\ B(w, w') \frown\!\!\smile h(w)g(w+w'); \end{cases}$$

es sind also A und B Thetafunctionen dritten Grades von w.

Drittens geht, wenn man w um s vermehrt, A in B, B in $-A$ über:

$$(6.)\quad A(w+s, w') = B(w, w'), \quad B(w+s, w') = -A(w, w').$$

Nachdem diese Eigenschaften, zu denen noch die Symmetrie hinzutritt, festgestellt sind, dürfen wir von dem Ausdruck der Functionen absehen. Wir setzen jetzt aus A und B die beiden Ausdrücke zusammen:

$$A(w, w')g(w-w')+B(w, w')f(w-w') = L(w, w'),$$
$$A(w, w')g(w-w')-B(w, w')f(w-w') = L(w', w).$$

Der zweite ist als $L(w', w)$ bezeichnet; denn bei der Vertauschung von w und w' bleiben $A(w, w')$, $B(w, w')$ und $g(w-w')$ ungeändert, während $f(w-w')$ sein Zeichen wechselt. Es ist dann, zufolge (4.):

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Theta}{\partial u} g(w-w')+\varepsilon \dfrac{\partial \Theta_\pi}{\partial u} f(w-w') = L(w, w')\Phi, \\ \dfrac{\partial \Theta}{\partial u} g(w-w')-\varepsilon \dfrac{\partial \Theta_\pi}{\partial u} f(w-w') = L(w', w)\Phi. \end{cases}$$

Diese Functionen L haben einfachere Eigenschaften als die vorigen A und B. Erstens sind beide, wenn wir nur w als Veränderliche ansehen, Thetafunctionen vierten Grades mit dem Aequivalenzwerth $h^2(w)$ oder $f^4(w)$. Dies geht unmittelbar aus (5.) hervor. Zweitens ergiebt sich, wenn man die Formeln (6.) benutzt:

$$(8.)\qquad \begin{cases} L(w+s, w') = -L(w, w'), \\ L(w', w+s) = L(w', w). \end{cases}$$

Es giebt nun nur zwei linear unabhängige Thetafunctionen vierten Grades mit dem Aequivalenzwerth $f^4(w)$, die die Eigenschaft $\varphi(w+s) = -\varphi(w)$ haben, und ebenso nur zwei, die der Bedingung $\varphi(w+s) = \varphi(w)$ genügen. Denken wir uns zwei solche Functionenpaare

$$\lambda(w),\quad \mu(w);\quad \nu(w),\quad \varrho(w)$$

eingeführt, sodass also:

$$(9.)\qquad \begin{cases} \lambda(w+s) = -\lambda(w), & \mu(w+s) = -\mu(w), \\ \nu(w+s) = \nu(w), & \varrho(w+s) = \varrho(w) \end{cases}$$

ist, dann muss sich $L(w, w')$, als abhängig von w, linear durch $\lambda(w)$, $\mu(w)$, als abhängig von w' dagegen linear durch $\nu(w')$, $\varrho(w')$ ausdrücken lassen. Mit anderen Worten: es wird $L(w, w')$ eine bilineare Form der beiden Werthepaare $\lambda(w)$, $\mu(w)$ und $\nu(w')$, $\varrho(w')$.

Ersetzen wir in der ersten Gleichung (7.) $\frac{\partial \Theta}{\partial u}$ und $\frac{\partial \Theta_\pi}{\partial u}$ durch die Ableitungen nach den anderen Argumenten u', u'', u''', so werden sich in dem Ausdruck $L(w, w')$ nur die vier Coefficienten ändern. Addirt man das System der vier Gleichungen, die auf diese Weise entstehen, nachdem man ihnen die Differentiale du, du', du'', du''' als Factoren hinzugefügt hat, so erhält man links Null, weil $d\Theta = 0$, $d\Theta_\pi = 0$ ist, und rechts eine Form, die linear ist in den vier Differentialen, ferner in $\lambda(w)$, $\mu(w)$, endlich in $\nu(w')$, $\varrho(w')$. Offenbar kann man diese Gleichung so schreiben:

$$(10.)\qquad \lambda(w)\nu(w')dv + \lambda(w)\varrho(w')dv' + \mu(w)\nu(w')dv'' + \mu(w)\varrho(w')dv''' = 0,$$

wo v, v', v'', v''' lineare Functionen der ursprünglichen Variabeln u, u' etc. sind. Die zweite der Gleichungen (7.) zeigt aber, dass wir hier w mit w' vertauschen dürfen:

$$(11.)\qquad \lambda(w')\nu(w)dv + \cdots + \mu(w')\varrho(w)dv''' = 0.$$

So haben wir zwei verschiedene Differentialbeziehungen, aus denen

wir folgenden Schluss ziehen. Wir führen zwei Hülfsgrössen ξ, ξ' ein — ebenfalls vollständige oder unvollständige Differentiale — sodass:

$$dv = \mu(w)\varrho(w)\xi+\mu(w')\varrho(w')\xi',$$
$$dv' = -\mu(w)\nu(w)\xi-\mu(w')\nu(w')\xi'$$

ist. Dann ergiebt sich aus (10.) und (11):

$$dv'' = -\lambda(w)\varrho(w)\xi-\lambda(w')\varrho(w')\xi',$$
$$dv''' = +\lambda(w)\nu(w)\xi+\lambda(w')\nu(w')\xi'.$$

Die vier Producte

$$\lambda(w)\nu(w),\quad \lambda(w)\varrho(w),\quad \mu(w)\nu(w),\quad \mu(w)\varrho(w)$$

sind Thetafunctionen achten Grades mit dem Aequivalenzwerth $f^8(w)$, die aber zufolge (9.) sämmtlich der Bedingung $\varphi(w+s) = -\varphi(w)$ genügen; sie verhalten sich in dieser Beziehung wie die Differenz $f^8(w)-g^8(w)$ und bilden offenbar wieder ein vollständiges System linear unabhängiger Functionen, die durch die angegebene Bedingung charakterisirt sind. Wir können nun zu den ursprünglichen Variabeln zurückkehren, und erhalten:

$$(12.)\qquad \begin{cases} du = P(w)\xi+P(w')\xi', \\ du' = Q(w)\xi+Q(w')\xi', \\ du'' = R(w)\xi+R(w')\xi', \\ du''' = S(w)\xi+S(w')\xi', \end{cases}$$

wo $P(w)$, $Q(w)$, $R(w)$, $S(w)$ vier linear unabhängige Thetafunctionen achten Grades mit dem Charakter von $f^8(w)$ bedeuten, die ihr Zeichen ändern, wenn w um die halbe Periode s vermehrt wird.

Jetzt ist noch zu zeigen, dass ξ, ξ' vollständige Differentiale sind. Es sei

$$\xi = x\,dw+y\,dw',\quad \xi' = z\,dw+t\,dw'.$$

Dann folgt:

$$du = (P(w)x+P(w')z)dw+(P(w)y+P(w')t)dw'.$$

Dies muss ein vollständiges Differential sein. Daher ist:

$$\frac{\partial}{\partial w'}(P(w)x+P(w')z) = \frac{\partial}{\partial w}(P(w)y+P(w')t),$$

oder:

$$P(w)\Big(\frac{\partial x}{\partial w'}-\frac{\partial y}{\partial w}\Big)+P(w')\Big(\frac{\partial z}{\partial w'}-\frac{\partial t}{\partial w}\Big)-P'(w)y+P'(w')z = 0.$$

Dieselbe Gleichung muss für Q, R, S gelten, und da die Determinante der

vier Grössenreihen:

$$\begin{array}{cccc} P(w), & P(w'), & P'(w), & P'(w'); \\ Q(w), & Q(w'), & Q'(w), & Q'(w'); \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

offenbar von Null verschieden ist, so folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial w'} - \frac{\partial y}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial w'} - \frac{\partial t}{\partial w} = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Es sind also y und z gleich Null, x ist nur von w, t nur von w' abhängig. Wir setzen demnach:

$$\xi = \frac{dw}{\varrho}, \quad \xi' = \frac{dw'}{\varrho'}, \tag{13.}$$

wo ϱ nur von w, ϱ' nur von w' abhängt.

Um diese Functionen ϱ, ϱ' zu bestimmen, stellen wir eine zweite Form auf:

$$\Theta_{78} \frac{\partial \Theta_{78\pi}}{\partial u} - \Theta_{78\pi} \frac{\partial \Theta_{78}}{\partial u} = M. \tag{14.}$$

Wir nehmen aber w' als constant an, und zwar wählen wir, was die Untersuchung wesentlich vereinfacht, für w' einen der Werthe, wofür $H_\pi(w')$ verschwindet. Nur muss dieser Werth von a_7, a_8, a_7+s, a_8+s verschieden sein, weil sonst $M = 0$ wird. Es sei etwa $w' = a_6$.

Jedenfalls lässt sich M linear durch die Thetaproducte $\Theta_m \Theta_{m\pi}$ ausdrücken, und zwar durch die, welche ungerade Functionen sind. Es sei Θ_m ungerade, $\Theta_{m\pi}$ gerade. Dann gelten für die entsprechenden S folgende Ausdrücke:

$$S_m = \frac{\sqrt{B_m(w)}\sqrt{B_m(w')} - \sqrt{A_m(w)}\sqrt{A_m(w')}}{g(w-w')},$$

$$S_{m\pi} = \frac{\sqrt{B_{m\pi}(w)}\sqrt{A_{m\pi}(w')} - \sqrt{A_{m\pi}(w)}\sqrt{B_{m\pi}(w')}}{f(w-w')}$$

oder, da $B_{m\pi}$ mit A_m, $A_{m\pi}$ mit B_m identisch ist:

$$S_{m\pi} = \frac{\sqrt{A_m(w)}\sqrt{B_m(w')} - \sqrt{B_m(w)}\sqrt{A_m(w')}}{f(w-w')}.$$

Hieraus folgt:

$$S_m S_{m\pi} = \frac{(A_m(w')+B_m(w'))\sqrt{H_\pi(w)} - (A_m(w)+B_m(w))\sqrt{H_\pi(w')}}{h(w-w')}.$$

Ist $H_\pi(w') = 0$, so erhält man einfach:

$$S_m S_{m\pi} = \text{Const.}\frac{\sqrt{H_\pi(w)}}{h(w-w')},$$

$$\Theta_m \Theta_{m\pi} = \text{Const.}\frac{\sqrt{H_\pi(w)}}{h(w-w')}\Phi^2.$$

Somit unterscheiden sich die Ausdrücke der einzelnen Producte nur durch den constanten Factor. Es wird demnach auch:

$$M = \text{Const.}\frac{\sqrt{H_\pi(w)}}{h(w-w')}\Phi^2,$$

und für diejenigen Grössen M', M'', M''', die aus M hervorgehen, indem man nach u', u'', u''' differentiirt, statt nach u, gilt dasselbe.

Bilden wir nun:

$$\Theta_{78} d\Theta_{78\pi} - \Theta_{78\pi} d\Theta_{78} = M du + M' du' + \text{etc.},$$

so nimmt dieser Ausdruck die Form an:

$$\frac{\sqrt{H_\pi(w)}}{h(w-w')}\Phi^2 dv,$$

wo dv eine lineare Function von du, du', du'', du''' mit constanten Coefficienten bedeutet. Dieses dv muss sich, den Gleichungen (12.) zufolge, so darstellen:

$$dv = \frac{L(w)dw}{\varrho},$$

und zwar ist $L(w)$ wieder eine Thetafunction achten Grades, die der Bedingung $L(w+s) = -L(w)$ genügt. Wir haben demnach:

$$(15.)\qquad \Theta_{78} d\Theta_{78\pi} - \Theta_{78\pi} d\Theta_{78} = \frac{\sqrt{H_\pi(w)}}{h(w-w')}\Phi^2 \frac{L(w)}{\varrho} dw.$$

Nun können wir den Ausdruck links aber auch dadurch darstellen, dass wir von den Gleichungen:

$$\Theta_{78} = [78]\sqrt{H_{78}(w)}\sqrt{H_{78}(w')} f(w+w'+a_7+a_8)\Phi,$$

$$\Theta_{78\pi} = \varepsilon[78]\sqrt{H_{78}(w)}\sqrt{H_{78}(w')} g(w+w'+a_7+a_8)\Phi$$

ausgehen. Es werde die Function:

$$f(u)g'(u) - g(u)f'(u) \quad \text{mit} \quad k(u)$$

bezeichnet. Dann folgt:

$$(16.)\qquad \Theta_{78} d\Theta_{78\pi} - \Theta_{78\pi} d\Theta_{78} = \text{Const.}\, h(w-a_7)h(w-a_8)k(w+w'+a_7+a_8)\Phi^2 dw.$$

Wir vergleichen jetzt (15.) mit (16.). Dann ergiebt sich:

$$\frac{\sqrt{H_\pi(w)}}{\varrho} = \text{Const.}\frac{h(w-w')h(w-a_7)h(w-a_8)k(w+w'+a_7+a_8)}{L(w)}.$$

Dies wäre eine elliptische Function. Berücksichtigt man aber, dass sie jedenfalls von den Indices unabhängig sein muss, und deshalb nicht für $w = a_6, a_7, a_8$ verschwinden kann, so reducirt sie sich auf eine Constante. Diese Constante dürfen wir ausserdem gleich 1 annehmen, indem wir sie mit $P(w)$, $Q(w)$ etc. verbinden. Dann ist:

$$\varrho = \sqrt{H_\pi(w)},$$

und ebenso muss natürlich:

$$\varrho' = \sqrt{H_\pi(w')}$$

sein. So kommen wir zu den Endformeln:

$$(17.)\quad \begin{cases} du = \dfrac{P(w)dw}{\sqrt{H_\pi(w)}} + \dfrac{P(w')dw'}{\sqrt{H_\pi(w')}}, \\ du' = \dfrac{Q(w)dw}{\sqrt{H_\pi(w)}} + \dfrac{Q(w')dw'}{\sqrt{H_\pi(w')}} \quad \text{etc.} \end{cases}$$

Die Quotienten:

$$\frac{P(w)}{h^4(w)}, \quad \frac{Q(w)}{h^4(w)} \quad \text{etc.}$$

sind elliptische Functionen, die ihr Zeichen ändern, wenn man w um s vermehrt.

§ 22.

Das Werthsystem $u = 0$, $u' = 0$ etc. und die halbe Periode π gehören zu denen, die Θ und Θ_π verschwinden lassen; dem ersteren entspricht der Punkt des Gebildes $(x, y) = (x', -y')$, dem zweiten der correspondirende $(x, y) = \left(\frac{1}{x'}, y'\right)$. Dementsprechend können wir die Argumente definiren als Integrale, erstreckt vom Punkte $(x', -y')$ zu (x, y). Wir wollen aber eine feste untere Grenze einführen, und zwar einen der Punkte, in denen $H_\pi(w)$ verschwindet. Diesen Punkt, der willkürlich aus den 2ϱ ausgewählt werden kann, nennen wir den Nullpunkt des Gebildes. In ihm verschwindet y von der ersten Ordnung. In der Nähe desselben dürfen wir uns w sowohl wie die vier Integrale erster Gattung

$$u(x, y) = \int \frac{P(w)dw}{\sqrt{H_\pi(w)}},$$

$$u'(x, y) = \int \frac{Q(w)dw}{\sqrt{H_\pi(w)}} \quad \text{etc.}$$

als eindeutige Functionen von y gegeben denken — etwa als Potenzreihen —, und zwar diese vier Integrale so, dass sie für $y = 0$ verschwinden, und dass sie ihr Vorzeichen ändern beim Uebergang von (x, y) zu $(x, -y)$. Die Argumente lassen sich dann entweder in der Form:

$$u = u(x, y) - u(x', -y'),$$
$$u' = u'(x, y) - u'(x', -y') \quad \text{etc.},$$

oder auch in dieser:

$$(1.) \quad \begin{cases} u = u(x, y) + u(x', y'), \\ u' = u'(x, y) + u'(x', y') \quad \text{etc.} \end{cases}$$

darstellen. Wenn wir (x, y), (x', y') zunächst in der Nähe des Nullpunkts annehmen, so sind die Integrale, die Thetafunctionen und alle Wurzelgrössen eindeutige Functionen der beiden Werthepaare. Sonst ist natürlich zur Werthbestimmung nothwendig, dass die Wege gegeben sind, die von der Umgebung des Nullpunkts zu (x, y) und (x', y') führen.

Aehnlich verhält es sich mit dem Factor Φ, den wir jetzt $\Phi(x, y;\ x', y')$ nennen, und der durch die Gleichung:

$$(2.) \quad \frac{\Theta_{\alpha\beta}(u(x, y) + u(x', y'), \ldots)}{[\alpha\beta]\sqrt{H_{\alpha\beta}(w)}\sqrt{H_{\alpha\beta}(w')}f(w + w' + a_\alpha + a_\beta)} = \Phi(x, y;\ x', y'),$$

aber auch durch die übrigen Thetafunctionen definirt werden kann. Für jedes Theta ist:

$$(3.) \quad \frac{\Theta_m}{S_m} = \text{Const.}\,\Phi.$$

Aus dieser letzteren Gleichung geht hervor, dass Φ nie unendlich wird; denn Θ_m kann nicht unendlich gross werden, und es giebt keinen Punkt des Gebildes, in dem alle Grössen S_m verschwinden. Wenn aber an einer Stelle irgend ein S_m unendlich wird, so muss an dieser offenbar Φ verschwinden. Mithin wird $\Phi(x, y;\ x', y') = 0$ in den beiden singulären Punkten.

Dies sind aber auch die einzigen Punkte des Gebildes (x, y), in denen $\Phi = 0$ wird, und es verschwindet Φ dort auch nur von der ersten Ordnung. Denn würde Φ noch an einer anderen Stelle Null, oder an einer der beiden singulären von höherer Ordnung, so würde die Formel (3.) anzeigen, dass dort sämmtliche Θ_m gleichzeitig verschwinden. Es gäbe also ein Werthsystem der Argumente v, v', v'', v''', für das alle 256 Theta

gemeinsam verschwinden. Dass dies unmöglich ist, zeigt sich auf sehr einfache Weise aus dem Additionstheorem. Es lässt sich nämlich:

$$(4.)\qquad \Theta(u+v, u'+v', \dots)\Theta(u-v, u'-v', \dots)$$

als ganze homogene Function einerseits der Grössen $\Theta_m(u, u', \dots)$, andrerseits der Grössen $\Theta_m(v, v', \dots)$ darstellen. Wäre nun jedes $\Theta_m(v, v', \dots)$ gleich Null, so wäre auch das Product (4.) gleich Null, und zwar für willkürliche Werthe von u, u', u'', u'''. Diese Annahme ist also auszuschliessen.

Die Function $\Phi(x, y;\ x', y')$ wird demnach nie unendlich, sie wird Null von der ersten Ordnung in den beiden singulären Punkten $(x, y) = (x', -y')$ und $\left(\frac{1}{x'}, y'\right)$; an jeder anderen Stelle ist sie zwar unendlich vieler Werthe fähig, die aber stets von Null verschieden sind.

Hier haben wir Φ als abhängig von (x, y) allein betrachtet. Nehmen wir beide Punkte als variabel an, aber in der Nähe des Nullpunkts gelegen, so ist die Function Φ in ihrem Ursprungs-Element symmetrisch abhängig von (x, y) und (x', y'); sie ist, wie aus (2.) hervorgeht, darstellbar als reguläre symmetrische Potenzreihe von y und y', die für $y = -y'$ verschwindet, und die ihr Zeichen ändert, wenn man gleichzeitig y durch $-y$, y' durch $-y'$ ersetzt.

Lassen wir y' in $-y'$ übergehen, ohne y zu ändern, so kommen wir zu einer Function $\Phi(x, y;\ x', -y')$, die Null wird in den beiden correspondirenden Punkten (x', y') und $\left(\frac{1}{x'}, -y'\right)$. Bei diesem Uebergang verwandelt sich $u(x', y')$ in $-u(x', y')$, und $\sqrt{H_{\alpha\beta}(w')}$ in $\mp\sqrt{H_{\alpha\beta}(w')}$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Function $H_{\alpha\beta}$ im Nullpunkt verschwindet oder nicht. Wir können demnach diese zweite Function durch folgende Formel definiren:

$$(5.)\qquad \frac{\Theta_{\alpha\beta}(u(x, y) - u(x', y'), \dots)}{\mp[\alpha\beta]\sqrt{H_{\alpha\beta}(w)}\sqrt{H_{\alpha\beta}(w')}f(w+w'+a_\alpha+a_\beta)} = \Phi(x, y;\ x', -y').$$

Hier zeigt sich, da $\Theta_{\alpha\beta}$ ungerade ist, dass die neue Function eine alternirende ist, wenn wir beide Punkte auf die Umgebung des Nullpunkts beschränken.

Nehmen wir ein Θ_m, das einer anderen Gruppe angehört, so ist das zugehörige S_m ein zweitheiliger Ausdruck. Der eine Theil ändert sein Zeichen beim Uebergang von y' zu $-y'$, der andre nicht; jedenfalls bleibt aber der Aequivalenzwerth von S_m ungeändert. Es ist deshalb

mente die Werthe

$$u = u(x,\ y)+u(x',\ y'),\quad \text{etc.},$$

so werden die Grössen φ sämmtlich rationale Functionen von (x, y), und der Thetaquotient in der Gleichung (2.) wird äquivalent ξ_p; es wird also Q das Product von ξ_p mit einer rationalen Function von (x, y). Der Punkt (x', y') ist hierbei beliebig. Lassen wir ihn mit dem Nullpunkt des Gebildes zusammenfallen, so werden die vorausgesetzten Werthe der Argumente mit den Integralen $u(x, y)$, $u'(x, y)$ u. s. f. identisch; denn $u(x', y')$ verschwindet. Wir sehen daher:

Für $u = u(x, y)$, $u' = u'(x, y)$ etc. wird jeder Quotient von Producten gleichvieler Theta:

$$C\,\frac{\Theta(u+a)_\alpha\,\Theta(u+b)_\beta\ldots}{\Theta(u+k)_\varkappa\,\Theta(u+l)_\lambda\ldots},$$

dessen Constanten die angegebene Bedingung erfüllen, eine Function von w, die den Aequivalenzwerth $\xi_{\alpha\beta\ldots\varkappa\lambda\ldots}$ besitzt.

Wir wenden dies zunächst an auf den Quotienten:

$$\frac{\Theta_m((u(x,y)+u(x_1,y_1))\,\Theta_m(u(x,y)-u(x_1,y_1))}{\Theta_m(u(x,y)+u(x_2,y_2))\,\Theta_m(u(x,y)-u(x_2,y_2))} = R(x,\ y),$$

der, dem aufgestellten Satz nach, eine rationale Function von (x, y) ist. (x_1, y_1) und (x_2, y_2) seien feste Punkte des Gebildes. Der Zähler werde mit Z, der Nenner mit N bezeichnet. Nach den letzten Formeln des vorigen Paragraphen ist dann:

$$Z \sim \frac{f^2(w)}{g^2(w-w_1)}\,\Phi(x,y;\ x_1,y_1)\Phi(x,y;\ x_1,-y_1);$$

denn ξ_m^2 ist rational. Nun wird $\Phi(x, y;\ x_1, y_1)$ gleich 0 für $(x, y) = (x_1, -y_1)$ und für $(x, y) = \left(\frac{1}{x_1}, y_1\right)$; $\Phi(x, y;\ x_1, -y_1)$ dagegen für $(x, y) = (x_1, y_1)$ und $(x, y) = \left(\frac{1}{x_1}, -y_1\right)$. Beide Functionen zusammen werden demnach Null in denselben vier Punkten des Gebildes, wie $h(w-w_1)$, und wenn wir:

$$(2.)\qquad \frac{\Phi(x,y;\ x_1,y_1)\Phi(x,y;\ x_1,-y_1)}{h(w-w_1)} = \Psi(x,y;\ x_1,y_1)$$

setzen, so ist dies eine Function von (x, y), die nirgends Null und nirgends unendlich wird. Wir bekommen so:

$$Z \sim f^8(w)e(w-w_1)\Psi(x,y;\ x_1,y_1),$$

und ebenso ist:

$$N \sim f^8(w)e(w-w_2)\Psi(x,y;\ x_2,y_2).$$

Nun sind aber Z und N äquivalente Grössen, da ihr Quotient rational ist. Ausserdem ist $e(w-w_1)\backsim e(w-w_2)$; folglich ist auch

$$\frac{\Psi(x,y;\ x_1,y_1)}{\Psi(x,y;\ x_2,y_2)}$$

eine rationale Function von (x, y). Aber diese kann niemals Null und niemals unendlich werden; sie ist also eine Constante in Bezug auf (x, y).

Hieraus schliessen wir, dass $\Psi(x, y;\ x_1, y_1)$ in zwei Factoren zerfällt, von denen der eine nur von (x, y), der andere nur von (x_1, y_1) abhängt. Die Gleichung (2.) zeigt ferner, dass die Function Ψ symmetrisch ist in Bezug auf beide Punkte (x, y) und (x_1, y_1), wenn man sie auf die Umgebung des Nullpunkts beschränkt; denn von den Factoren des Zählers ist der erste symmetrisch, der zweite, ebenso wie der Nenner, alternirend. Wir können demzufolge setzen:

$$\Psi(x, y;\ x_1, y_1) = \Psi(x,\ y)\Psi(x_1,\ y_1).$$

So sind wir zu der Gleichung:

$$(3.)\quad \Phi(x, y;\ x_1, y_1)\Phi(x, y;\ x_1, -y_1) = h(w-w_1)\Psi(x,\ y)\Psi(x_1,\ y_1)$$

gelangt, in der $\Psi(x, y)$ eine Transcendente ohne Null- und Unendlichkeitsstellen bedeutet.

§ 24.

Wir nehmen jetzt für u, u', u'', u''' Summen von je vier Integralen:

$$(1.)\quad \begin{cases} u = u(x,\ y)+u(x_1,\ y_1)+u(x_2,\ y_2)+u(x_3,\ y_3), \\ u' = u'(x,\ y)+\cdots \\ \quad\text{etc.} \end{cases}$$

Dann dürfen u, u', u'', u''' als unbeschränkt veränderliche Argumente gelten, da ihre Functional-Determinante nach x, x_1, x_2, x_3 nicht verschwindet. Bilden wir nun den Quotienten:

$$\Theta_n(u)\cdot\frac{\Theta_m(u(x,y)-u(x_1,y_1))}{\Theta_m(u(x,y)+u(x_2,y_2))\,\Theta_m(u(x,y)+u(x_3,y_3))},$$

so ist dieser, dem allgemeinen Satz zufolge, darstellbar als Product von ξ_{mn} mit einer rationalen Function von (x, y). Wir erhalten daher:

$$\Theta_n(u)\backsim\xi_{mn}\frac{\Theta_m(u(x,y)+u(x_2,y_2))\,\Theta_m(u(x,y)+u(x_3,y_3))}{\Theta_m(u(x,y)-u(x_1,y_1))}.$$

Die Indices m, n sind beliebig; nur muss natürlich Θ_m von Θ und Θ_n verschieden gewählt werden.

Es ist aber — wenn w, w_1, w_2, w_3 die Werthe von w in den vier Punkten bedeuten —:

$$\Theta_m(u(x, y)+u(x_2, y_2)) \sim \frac{f^4(w)}{g(w-w_2)} \xi_m \Phi(x, y;\ x_2, y_2),$$

$$\Theta_m(u(x, y)+u(x_3, y_3)) \sim \frac{f^4(w)}{g(w-w_3)} \xi_m \Phi(x, y;\ x_3, y_3),$$

$$\Theta_m(u(x, y)-u(x_1, y_1)) \sim \frac{f^4(w)}{g(w-w_1)} \xi_m \Phi(x, y;\ x_1, -y_1).$$

Folglich:

$$\Theta_n(u) \sim \frac{f^4(w) g(w-w_1)}{g(w-w_2) g(w-w_3)} \xi_n \frac{\Phi(x, y;\ x_2, y_2)\Phi(x, y;\ x_3, y_3)}{\Phi(x, y;\ x_1, -y_1)}.$$

Diese Formel gestaltet sich symmetrischer, wenn wir die letzte Gleichung des vorigen Paragraphen benutzen. Sie geht dadurch über in:

$$\Theta_n(u) \sim \frac{f^4(w)\xi_n \Phi(x, y;\ x_1, y_1)\Phi(x, y;\ x_2, y_2)\Phi(x, y;\ x_3, y_3)}{g(w-w_2)g(w-w_3)f(w-w_1)\Psi(x, y)},$$

oder, da

$$f^4(w) \sim g(w-w_2)g(w-w_3)f(w-w_1)f(w+w_1+w_2+w_3)$$

ist:

$$\Theta_n(u) \sim f(w+w_1+w_2+w_3)\xi_n \frac{\Phi(x, y;\ x_1, y_1)\Phi(x, y;\ x_2, y_2)\Phi(x, y;\ x_3, y_3)}{\Psi(x, y)}.$$

Wir fügen noch im Zähler die drei von (x, y) unabhängigen Factoren:

$$\Phi(x_1, y_1;\ x_2, y_2),\quad \Phi(x_1, y_1;\ x_3, y_3),\quad \Phi(x_2, y_2;\ x_3, y_3)$$

und im Nenner:

$$\Psi(x_1, y_1)\Psi(x_2, y_2)\Psi(x_3, y_3)$$

hinzu. Das symmetrische Product:

$$\frac{\Phi(x, y;\ x_1, y_1)\Phi(x, y;\ x_2, y_2)\ldots\Phi(x_2, y_2;\ x_3, y_3)}{\Psi(x, y)\Psi(x_1, y_1)\Psi(x_2, y_2)\Psi(x_3, y_3)} \tag{2.}$$

werde mit R bezeichnet. Dann ist:

$$\Theta_n(u) \sim f(w+w_1+w_2+w_3)\xi_n R. \tag{3.}$$

Mit Hülfe dieser Gleichung ist es möglich, die einzelnen Functionen $\Theta_n(u)$, deren Argumente als Summen von vier Integralen gegeben sind, durch die Grenzen dieser Integrale auszudrücken. Betrachten wir den transcendenten Factor R. Dieser wird nie unendlich, und verschwindet als Function von (x, y) in den sechs Punkten:

$$(x_\alpha, -y_\alpha),\quad \left(\frac{1}{x_\alpha}, y_\alpha\right) \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Bilden wir also den Quotienten

$$\frac{\Theta_n(u)}{R},$$

so ist dies eine Function mit dem Aequivalenzwerth $f(w+w_1+w_2+w_3)\xi_n$, die nur in den angegebenen sechs Punkten unendlich werden kann, und zwar höchstens von der ersten Ordnung.

Wir werden sehen, dass diese Bedingung genügt, um die Function bis auf einen von (x, y) unabhängigen Factor zu bestimmen. Ist der Ausdruck, den wir auf diese Weise erhalten, ausserdem symmetrisch in Bezug auf alle vier Punkte, so nennen wir ihn wieder S_n, und offenbar kann sich dann $\Theta_n(u)$ von RS_n nur um einen Factor unterscheiden, der von allen vier Punkten unabhängig ist. Die Bestimmung dieser Constanten, die leicht ist, wenn man die specielleren Formeln des vorigen Abschnitts heranzieht, übergehen wir, da sie kein besonderes Interesse mehr bietet.

Multiplicirt man S_n mit dem alternirenden Product

$$h(w-w_1)h(w-w_2)h(w-w_3)h(w_1-w_2)h(w_1-w_3)h(w_2-w_3) = D,$$

und setzt:

$$DS_n = X_n,$$

so ist X_n eine alternirende Function der vier Punkte, und als abhängig von (x, y) charakterisirt durch den Aequivalenzwerth:

$$X_n \sim h(w-w_1)h(w-w_2)h(w-w_3)f(w+w_1+w_2+w_3)\xi_n,$$

sowie durch die Bedingung, dass X_n nirgends unendlich werden darf, aber verschwinden muss in den sechs Punkten:

$$(x_a, y_a), \quad \left(\frac{1}{x_a}, -y_a\right) \qquad (a = 1, 2, 3).$$

Um die Ausdrücke X_n oder S_n wirklich zu bilden, werden wir allerdings wieder die vier Gruppen zu unterscheiden haben, was die Aufgabe complicirt macht; auch die Resultate werden der Form nach durchaus verschieden. Eine Vereinfachung aber ergiebt sich aus folgender Bemerkung. Ersetzt man (x, y) durch den correspondirenden Punkt $\left(\frac{1}{x}, -y\right)$, so werden offenbar die Nullpunkte von X_n, und die Unendlichkeitspunkte von S_n nicht geändert. Auch die Grösse ξ_n behält ihren Aequivalenzwerth. Denn nach den Angaben am Schluss von § 19 ist:

$$\xi_n = \frac{\sqrt{A_n(w)}}{\sqrt{A(w)}}\varrho^N, \quad \varrho = \frac{f^4(w)}{\sqrt{A(w)}}.$$

Führt man nun die Transformation aus, wodurch w in $w+s$ übergeht, so ergiebt sich:

$$\xi_n' = \frac{\sqrt{B_n(w)}}{\sqrt{B(w)}}(\varrho')^N, \quad \varrho' = \frac{g^4(w)}{\sqrt{B(w)}}.$$

Da nun

$$\sqrt{A_n(w)}\sqrt{B_n(w)} = \sqrt{A(w)}\sqrt{B(w)} = \sqrt{H_\pi(w)}$$

ist, so folgt:

$$\xi_n\xi_n' = (\varrho\varrho')^N,$$
$$\varrho\varrho' = \frac{h^4(w)}{\sqrt{H_\pi(w)}} = \frac{1}{y}.$$

Mithin ist $\xi_n\xi_n' = y^{-N}$, und da ausserdem $\xi_n^2 \frown 1$ ist, so erhalten wir $\xi_n' \frown \xi_n$.

Nur der Factor $f(w+w_1+w_2+w_3)$ ändert sich; er geht in $g(w+w_1+w_2+w_3)$ über. Die Function, die aus S_n hervorgeht, indem man den Punkt (x, y) durch seinen correspondirenden ersetzt, hat demnach den Aequivalenzwerth $g(w+w_1+w_2+w_3)\xi_n$. Dies lässt sich aber, da $\xi_n \frown e(w)$ ist, auf die Form:

$$S_n' \frown f(w+w_1+w_2+w_3)\xi_{n\pi}$$

bringen. Es genügt also die Function S_n', die aus S_n durch die Transformation von w in $w+s$, und von $\sqrt{H_\pi(w)}$ in $-\sqrt{H_\pi(w)}$ hervorgeht, in jeder Beziehung denselben Bedingungen, wie $S_{n\pi}$, und wir können deshalb $S_{n\pi} = S_n'$ setzen.

§ 25.

Ist der Aequivalenzwerth φ einer Function X gegeben, so ist X das Product von φ mit einer rationalen Function von (x, y). Jede rationale Function aber lässt sich so darstellen:

$$\lambda(w)+\mu(w)y,$$

wo $\lambda(w)$ und $\mu(w)$ elliptische Functionen sind. Setzt man nun $y\varphi = \psi$, so wird:

$$X = \lambda(w)\varphi+\mu(w)\psi.$$

Hier kann φ sowohl wie ψ dadurch geändert werden, dass man irgend welche elliptischen Functionen als Factoren hinzufügt. Es handelt sich nun darum, für jedes X_n ein möglichst einfaches Paar solcher Aequivalenzwerthe φ, ψ herzustellen.

Es ist allgemein:

$$(1.)\quad \begin{cases} X_n \sim K\xi_n, \\ K = h(w-w_1)h(w-w_2)h(w-w_3)f(w+w_1+w_2+w_3), \\ \xi_n = \dfrac{\sqrt{A_n(w)}}{\sqrt{A(w)}}\varrho^N, \quad \varrho = \dfrac{f^4(w)}{\sqrt{A(w)}}. \end{cases}$$

Wir führen zunächst den Fall durch, wo N eine gerade Zahl ist:

$$N \equiv 0 \pmod{2}.$$

Dann ist ϱ^N eine Potenz von ϱ^2. Es ist aber $\varrho^2 \sim e(w)$; folglich:

$$\xi_n \sim \frac{\sqrt{A_n(w)}}{\sqrt{A(w)}}(e(w))^{\frac{1}{2}N}.$$

Ausserdem ist, nach (8.), § 17:

$$\frac{\sqrt{A_n(w)}}{\sqrt{A(w)}} = \frac{\sqrt{H_n(w)}}{\prod\limits_\nu f(w-a_\nu)},$$

wo das Product im Nenner sich über alle Elemente von n erstreckt und demnach aus N Factoren besteht. Somit haben wir:

$$\xi_n \sim \frac{\sqrt{H_n(w)}}{\prod\limits_\nu f(w-a_\nu)}(e(w))^{\frac{1}{2}N}.$$

Ferner, da $\Sigma a_\nu = a_n$ ist:

$$\prod_\nu f(w-a_\nu).f(w+a_n) \sim f^{N+1}(w).$$

Folglich:

$$\xi_n \sim \frac{f(w+a_n)}{f^{N+1}(w)}\sqrt{H_n(w)}(e(w))^{\frac{1}{2}N}.$$

Diese Formel lässt sich noch etwas anders fassen, wenn man berücksichtigt, dass $f^2(w) = e(w)h(w)$ ist; nämlich so:

$$(2.)\quad \xi_n \sim \frac{f(w+a_n)}{f(w)}\,\frac{\sqrt{H_n(w)}}{(h(w))^{\frac{1}{2}N}}.$$

Hierzu fügen wir einen zweiten Aequivalenzwerth derselben Grösse:

$$(3.)\quad \xi_n \sim \frac{f(w-a_n)}{f(w)}\,\frac{\sqrt{H_{nn}(w)}}{(h(w))^{4-\frac{1}{2}N}}.$$

Dass in der That beide Ausdrücke äquivalent sind, sieht man sofort, wenn

man ihr Product bildet:

$$\xi_n^2 \sim \frac{f(w+a_n)f(w-a_n)}{f^2(w)} \frac{\sqrt{H_\pi(w)}}{(h(w))^4}.$$

Diese Formel ist richtig; denn es ist $\xi_n^2 \sim 1$, und der Ausdruck auf der rechten Seite ist ebenfalls eine rationale Function von (x, y).

Dem Factor K geben wir die Form:

$$K \sim h^3(w) f(w-w_1-w_2-w_3).$$

Dann ergeben sich aus (2.) und (3.) zwei Werthe, die beide äquivalent $K\xi_n$ oder X_n sind:

$$(4.) \quad \begin{cases} \varphi = f(w-w_1-w_2-w_3+a_n)(h(w))^{3-\frac{1}{2}N} \sqrt{H_n(w)}, \\ \psi = f(w-w_1-w_2-w_3-a_n)(h(w))^{\frac{1}{2}N-1} \sqrt{H_{n\pi}(w)}. \end{cases}$$

Wir werden demnach X_n so darstellen:

$$(5.) \quad X_n = L(w)\sqrt{H_n(w)} + M(w)\sqrt{H_{n\pi}(w)},$$

wo $L(w)$ und $M(w)$ eindeutige Functionen von w sind, die den Bedingungen genügen:

$$(6.) \quad \begin{cases} L(w) \sim f(w-w_1-w_2-w_3+a_n)(h(w))^{3-\frac{1}{2}N}, \\ M(w) \sim f(w-w_1-w_2-w_3-a_n)(h(w))^{\frac{1}{2}N-1}. \end{cases}$$

Hierzu kommt, dass X_n im Gebilde nie unendlich werden darf, und dass deswegen auch die beiden Theile, aus denen der Ausdruck besteht, stets endliche Werthe haben müssen. Dann kann aber auch weder $L(w)$ noch $M(w)$ unendlich werden. Folglich sind $L(w)$ und $M(w)$ elliptische Thetafunctionen, die erstere vom Grade $7-N$, die zweite vom Grade $N-1$; ihr Charakter ist durch die Formeln (6.) bestimmt.

Der Ausdruck $L(w)$ enthält hiernach $7-N$, der andere $N-1$ Coefficienten. X_n hat also im Ganzen sechs Coefficienten, für deren Bestimmung die Gleichungen:

$$(7.) \quad X_n = 0 \quad \text{für} \quad (x, y) = (x_a, y_a) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{x_a}, -y_a\right) \qquad (a=1,2,3),$$

oder, was dasselbe ist:

$$L(w)\sqrt{H_n(w)} + M(w)\sqrt{H_{nn}(w)} = 0$$

für:

$$w = w_a, \quad \sqrt{H_n(w)} = \sqrt{H_n(w_a)} \quad \text{und} \quad w = w_a + s, \quad \sqrt{H_n(w)} = -\sqrt{H_\pi(w_a)}$$

gegeben sind. Führen wir $\sqrt{H_n(w_a)}$, $\sqrt{H_{n\pi}(w_a)}$ so ein, dass das Product dieser Grössen gleich $\sqrt{H_\pi(w_a)}$ oder $y_a h^4(w_a)$ ist, so haben wir zur Bestimmung der Coefficienten das System von sechs Gleichungen:

$$(8.)\qquad \begin{cases} L(w_a)\sqrt{H_n(w_a)}+M(w_a)\sqrt{H_{n\pi}(w_a)} = 0, \\ L(w_a+s)\sqrt{H_n(w_a)}-M(w_a+s)\sqrt{H_{n\pi}(w_a)} = 0 \end{cases} \qquad (a = 1, 2, 3).$$

I. Im Allgemeinen ist eine Gleichung mehr vorhanden, als zur Bestimmung der Coefficienten nöthig wäre. Nur in den beiden besonderen Fällen:

$$N=0 \quad \text{und} \quad N=8,$$

wo es sich um die beiden ausgezeichneten Functionen Θ, Θ_π handelt, braucht man sie alle. Denn für $N=0$ wäre $M(w)$ eine Thetafunction vom Grade -1. Eine solche existirt nicht; demnach ist $M(w)$ identisch Null. $L(w)$ ist dann eine Thetafunction siebenten Grades, die aber, den Gleichungen (8.) zufolge, für $w=w_a$ und $w=w_a+s$ verschwindet. $L(w)$ muss daher durch $h(w-w_1)h(w-w_2)h(w-w_3)_4$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch das im vorigen Paragraphen definirte alternirende Product D theilbar sein. Der Rest ist eine Thetafunction ersten Grades, die, dem gegebenen Aequivalenzwerth nach, nur $f(w+w_1+w_2+w_3+a_n)$ sein kann. a_n ist aber Null, und $H_n(w)=1$. Wir erhalten daher:

$$(9.)\qquad \begin{cases} X_0 = Df(w+w_1+w_2+w_3), \\ S_0 = f(w+w_1+w_2+w_3). \end{cases}$$

Die entsprechenden Formeln des anderen Falls, $N=8$, werden hieraus direct gewonnen, indem man w durch $w+s$ ersetzt:

$$(10.)\qquad \begin{cases} X_\pi = Dg(w+w_1+w_2+w_3), \\ S_\pi = g(w+w_1+w_2+w_3). \end{cases}$$

Demnach ist:

$$(11.)\qquad \frac{\Theta(u)}{\Theta_\pi(u)} = \text{Const.}\, e(w+w_1+w_2+w_3).$$

Man sieht leicht, dass der Werth des constanten Factors nur ± 1 sein kann. Denn lässt man w_2 mit a_7, w_3 mit a_8 zusammenfallen, so wird $u(x_2,y_2)+u(x_3,y_3)$ gleich der zum Index 78 gehörigen halben Periode, und die Gleichung (11.) muss mit der Formel des vorigen Abschnitts:

$$\frac{\Theta_{78}}{\Theta_{78\pi}} = \varepsilon e(w+w'+a_7+a_8)$$

identisch werden.

II. Wir gehen jetzt zu $N=2$ und $N=6$ über.

Es sei zunächst $N=2$. Dann folgt aus (6.):

$$(12.)\qquad \begin{cases} L(w) \backsim f(w-w_1-w_2-w_3+a_n)h^2(w), \\ M(w) \backsim f(w-w_1-w_2-w_3-a_n). \end{cases}$$

Die letztere Gleichung bestimmt $M(w)$ bis auf einen constanten Factor. Es muss:

$$(13.)\qquad M(w) = Cf(-w+w_1+w_2+w_3+a_n)$$

sein, wo C von w unabhängig ist. Der Thetafunction fünften Grades $L(w)$ geben wir die Form:

$$(14.)\qquad \begin{cases} L_1 h(w-w_2)h(w-w_3)f(w-w_1+w_2+w_3+a_n) \\ +L_2 h(w-w_3)h(w-w_1)f(w+w_1-w_2+w_3+a_n) \\ +L_3 h(w-w_1)h(w-w_2)f(w+w_1+w_2-w_3+a_n), \end{cases}$$

die allerdings der Bedingung (12.) genügt. Sie muss aber doch erst dadurch gerechtfertigt werden, dass wir zeigen: die Coefficienten L_1, L_2, L_3 und C lassen sich so bestimmen, dass die Gleichungen (8.) sämmtlich erfüllt werden.

Setzen wir $w=w_1$, so erhalten wir aus (13.) und (14.):

$$M(w_1) = Cf(w_2+w_3+a_n),$$
$$L(w_1) = L_1 h(w_1-w_2)h(w_1-w_3)f(w_2+w_3+a_n).$$

Dagegen wird:

$$M(w_1+s) = -Cg(w_2+w_3+a_n),$$
$$L(w_1+s) = L_1 h(w_1-w_2)h(w_1-w_3)g(w_2+w_3+a_n).$$

Die Gleichungen (8.) führen in beiden Fällen zu derselben Beziehung zwischen C und L_1:

$$(15.)\qquad L_1 h(w_1-w_2)h(w_1-w_3)\sqrt{H_n(w_1)}+C\sqrt{H_{nn}(w_1)} = 0.$$

Wir setzen, da wir für C einen willkürlichen von w unabhängigen Werth wählen dürfen:

$$C = \sqrt{H_n(w_1)}\sqrt{H_n(w_2)}\sqrt{H_n(w_3)}h(w_1-w_2)h(w_1-w_3)h(w_2-w_3).$$

Dann wird, zufolge (15.):

$$L_1 = -\sqrt{H_{nn}(w_1)}\sqrt{H_n(w_2)}\sqrt{H_n(w_3)}\,h(w_2-w_3),$$
$$L_2 = -\sqrt{H_n(w_1)}\sqrt{H_{nn}(w_2)}\sqrt{H_n(w_3)}\,h(w_3-w_1),$$
$$L_3 = -\sqrt{H_n(w_1)}\sqrt{H_n(w_2)}\sqrt{H_{nn}(w_3)}\,h(w_1-w_2),$$

und wenn wir die Werthe dieser Coefficienten in die Ausdrücke $L(w)$, $M(w)$ einführen, so wird $L(w)\sqrt{H_n(w)}+M(w)\sqrt{H_{nn}(w)}$ oder X_n gleich:

$$\sqrt{H_{nn}(w)}\sqrt{H_n(w_1)}\sqrt{H_n(w_2)}\sqrt{H_n(w_3)}$$
$$.\,h(w_1-w_2)h(w_1-w_3)h(w_2-w_3)f(-w+w_1+w_2+w_3+a_n)$$
$$-\sqrt{H_n(w)}\sqrt{H_{nn}(w_1)}\sqrt{H_n(w_2)}\sqrt{H_n(w_3)}$$
$$.\,h(w-w_2)h(w-w_3)h(w_2-w_3)f(w-w_1+w_2+w_3+a_n)-\text{etc.}$$

Der ganze Summenausdruck besteht aus vier Gliedern und ist alternirend in Bezug auf die vier Punkte. Dividiren wir ihn durch das mit D bezeichnete Product, so erhalten wir den symmetrischen Ausdruck S_n:

$$(16^a.)\quad S_n = \sum_{0,1,2,3} \frac{\sqrt{H_{nn}(w_0)}\sqrt{H_n(w_1)}\sqrt{H_n(w_2)}\sqrt{H_n(w_3)}f(-w_0+w_1+w_2+w_3+a_n)}{h(w_0-w_1)h(w_0-w_2)h(w_0-w_3)},$$

wo wir, um die Symmetrie stärker hervorzuheben, der Variabeln w den Index 0 gegeben haben.

Zu den Grössen S_{nn} mit sechsgliedrigem Index kann man übergehen, indem man w_0+s statt w_0, und $-\sqrt{H_n(w_0)}$ statt $\sqrt{H_n(w_0)}$ schreibt:

$$(16^b.)\quad S_{nn} = \sum_{0,1,2,3} \frac{\sqrt{H_{nn}(w_0)}\sqrt{H_n(w_1)}\sqrt{H_n(w_2)}\sqrt{H_n(w_3)}g(-w_0+w_1+w_2+w_3+a_n)}{h(w_0-w_1)h(w_0-w_2)h(w_0-w_3)}.$$

III. $N=4$.

In diesem Fall sind $L(w)$ und $M(w)$ vom dritten Grade:

$$L(w) \sim f(w-w_1-w_2-w_3+a_n)h(w),$$
$$M(w) \sim f(w-w_1-w_2-w_3-a_n)h(w).$$

Wir denken uns demnach $L(w)$ und $M(w)$ so dargestellt:

$$(17.)\quad \begin{cases} L(w) = L_1 h(w-w_1)f(w+w_1-w_2-w_3+a_n) \\ \qquad +L_2 h(w-w_2)f(w+w_2-w_1-w_3+a_n) \\ \qquad +L_3 h(w-w_3)f(w+w_3-w_1-w_2+a_n), \\ M(w) = M_1 h(w-w_1)f(w_2+w_3-w-w_1+a_n) \\ \qquad +M_2 h(w-w_2)f(w_1+w_3-w-w_2+a_n) \\ \qquad +M_3 h(w-w_3)f(w_1+w_2-w-w_3+a_n). \end{cases}$$



Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
L(w_1) &= \quad L_2 h(w_1-w_2)\,f(w_2-w_3+a_n)+L_3 h(w_1-w_3)\,f(w_3-w_2+a_n),\\
M(w_1) &= \quad M_2 h(w_1-w_2)\,f(w_3-w_2+a_n)+M_3 h(w_1-w_3)\,f(w_2-w_3+a_n);\\
L(w_1+s) &= -L_2 h(w_1-w_2)g(w_2-w_3+a_n)-L_3 h(w_1-w_3)g(w_3-w_2+a_n),\\
M(w_1+s) &= \quad M_2 h(w_1-w_2)g(w_3-w_2+a_n)+M_3 h(w_1-w_3)g(w_2-w_3+a_n).
\end{aligned}$$

Die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
L(w_1)\sqrt{H_n(w_1)}+M(w_1)\sqrt{H_{n\pi}(w_1)} &= 0,\\
L(w_1+s)\sqrt{H_n(w_1)}-M(w_1+s)\sqrt{H_{n\pi}(w_1)} &= 0
\end{aligned}$$

führen daher zu folgenden Beziehungen zwischen den Coefficienten:

$$\begin{aligned}
&\left(L_2 h(w_1-w_2)\sqrt{H_n(w_1)}+M_3 h(w_1-w_3)\sqrt{H_{n\pi}(w_1)}\right) f(w_2-w_3+a_n)\\
&+\left(L_3 h(w_1-w_3)\sqrt{H_n(w_1)}+M_2 h(w_1-w_2)\sqrt{H_{n\pi}(w_1)}\right) f(w_3-w_2+a_n) = 0,\\
&\left(L_2 h(w_1-w_2)\sqrt{H_n(w_1)}+M_3 h(w_1-w_3)\sqrt{H_{n\pi}(w_1)}\right) g(w_2-w_3+a_n)\\
&+\left(L_3 h(w_1-w_3)\sqrt{H_n(w_1)}+M_2 h(w_1-w_2)\sqrt{H_{n\pi}(w_1)}\right) g(w_3-w_2+a_n) = 0.
\end{aligned}$$

Die eingeklammerten Ausdrücke sind in beiden Formeln dieselben; sie müssen also Null sein. So erkennen wir, dass, wenn α, β, γ die Indices 1, 2, 3 in irgend welcher Reihenfolge bedeuten, stets:

$$(18.)\qquad L_\beta h(w_\alpha-w_\beta)\sqrt{H_n(w_\alpha)}+M_\gamma h(w_\alpha-w_\gamma)\sqrt{H_{n\pi}(w_\alpha)} = 0$$

ist. Diese Beziehung reicht offenbar aus, um die Verhältnisse aller sechs Coefficienten anzugeben. Wir genügen ihr, wenn wir setzen:

$$\begin{aligned}
L_1 &= h(w_2-w_3)\sqrt{H_n(w_1)}\,\sqrt{H_{n\pi}(w_2)}\sqrt{H_{n\pi}(w_3)},\\
L_2 &= h(w_3-w_1)\sqrt{H_{n\pi}(w_1)}\sqrt{H_n(w_2)}\,\sqrt{H_{n\pi}(w_3)},\\
L_3 &= h(w_1-w_2)\sqrt{H_{n\pi}(w_1)}\sqrt{H_{n\pi}(w_2)}\sqrt{H_n(w_3)};\\
M_1 &= h(w_2-w_3)\sqrt{H_{n\pi}(w_1)}\sqrt{H_n(w_2)}\,\sqrt{H_n(w_3)},
\end{aligned}$$

u. s. f. Diese Werthe sind in die Ausdrücke (17.) für $L(w)$ und $M(w)$ einzuführen. Dann wird wieder

$$X_n = L(w)\sqrt{H_n(w)}+M(w)\sqrt{H_{n\pi}(w)}$$

eine alternirende, dagegen S_n eine symmetrische Summe, die aus sechs Gliedern besteht, und die wir so schreiben können:

$$(19.)\quad S_n = S\,\frac{f(w_0+w_1-w_2-w_3+a_n)\sqrt{H_n(w_0)}\sqrt{H_n(w_1)}\sqrt{H_{n\pi}(w_2)}\sqrt{H_{n\pi}(w_3)}}{h(w_0-w_2)h(w_0-w_3)h(w_1-w_2)h(w_1-w_3)}.$$

Die fünf übrigen Glieder entspringen aus dem hingeschriebenen, indem man das Punktepaar (w_0, w_1) der Reihe nach mit:

$$(w_0, w_2),\quad (w_0, w_3),\quad (w_1, w_2),\quad (w_1, w_3),\quad (w_2, w_3)$$

vertauscht.

IV. Nun kommen wir zu dem letzten Fall: $N \equiv 1 \pmod{2}$, also zu den Functionen, die sich zu Θ und Θ_π azygetisch verhalten.

Hier müssen wir aber die Darstellung ändern. Aus den Gleichungen:

$$\xi_n = \frac{\sqrt{A_n(w)}}{\sqrt{A(w)}}\varrho^N,$$

$$\varrho = \frac{f^4(w)}{\sqrt{A(w)}},\quad \varrho^2 \backsim e(w)$$

ziehen wir die Folgerung:

$$\xi_n \backsim \frac{\sqrt{A_n(w)}}{f^4(w)}(e(w))^{\frac{1}{2}(N+1)}.$$

Es war aber:

$$K = h(w-w_1)h(w-w_2)h(w-w_3)f(w+w_1+w_2+w_3),$$

und da:

$$f(w-w_1)f(w-w_2)f(w-w_3)f(w+w_1+w_2+w_3) \backsim f^4(w)$$

ist, so können wir setzen:

$$K \backsim g(w-w_1)g(w-w_2)g(w-w_3)f^4(w).$$

Danach wird:

$$(20.)\quad X_n \backsim g(w-w_1)g(w-w_2)g(w-w_3)(e(w))^{\frac{1}{2}(N+1)}\sqrt{A_n(w)},$$

also entweder:

$$X_n \backsim f(w-w_1)f(w-w_2)f(w-w_3)\sqrt{A_n(w)}$$

oder:

$$X_n \backsim g(w-w_1)g(w-w_2)g(w-w_3)\sqrt{A_n(w)},$$

je nachdem $N \equiv 1$ oder $N \equiv 3 \pmod{4}$ ist.

Wir dürfen uns auf einen dieser beiden Fälle beschränken. Denn zu dem andern können wir dann leicht durch die Transformation von w in $w+s$ übergehen. Wir nehmen:

$$N \equiv 1 \pmod{4}$$



an. Dann ist:

$$\varphi = f(w-w_1)f(w-w_2)f(w-w_3)\sqrt{A_n(w)}$$

ein Aequivalenzwerth von X_n, und:

$$\psi = f(w-w_1)f(w-w_2)f(w-w_3)\sqrt{B_n(w)}$$

ein zweiter, weil für den Fall eines ungeraden N die beiden Grössen $\sqrt{A_n(w)}$ und $\sqrt{B_n(w)}$ äquivalent sind. Das Product $\sqrt{A_n(w)}\sqrt{B_n(w)}$ ist wieder gleich $\sqrt{H_n(w)}$, ebenso wie vorhin $\sqrt{H_n(w)}\sqrt{H_{nn}(w)}$. Hiernach gilt für X_n folgende Darstellung:

$$(21.)\qquad X_n = L(w)\sqrt{A_n(w)}+M(w)\sqrt{B_n(w)},$$

wo $L(w)$ und $M(w)$ eindeutige Functionen von w sind, mit dem Aequivalenzwerth:

$$f(w-w_1)f(w-w_2)f(w-w_3).$$

Da X_n nie unendlich wird, so dürfen auch $L(w)$, $M(w)$ nicht unendlich werden. Dies sind also Thetafunctionen dritten Grades, die wir zusammensetzen können aus den drei Functionen:

$$(22.)\qquad \begin{cases} f(w-w_1)g(w-w_2)g(w-w_3) = P_1(w), \\ f(w-w_2)g(w-w_3)g(w-w_1) = P_2(w), \\ f(w-w_3)g(w-w_1)g(w-w_2) = P_3(w). \end{cases}$$

Es sei:

$$(23.)\qquad \begin{cases} L(w) = L_1P_1(w)+L_2P_2(w)+L_3P_3(w), \\ M(w) = M_1P_1(w)+M_2P_2(w)+M_3P_3(w); \end{cases}$$

also:

$$(24.)\qquad X_n = \sum_{a=1}^{3}\left(L_a\sqrt{A_n(w)}+M_a\sqrt{B_n(w)}\right)P_a(w).$$

Wir wollen bald den Ausdruck für X_{nn} hinzufügen. Dieser entspringt aus X_n, wenn wir w durch $w+s$ ersetzen, und hierbei $\sqrt{H_n(w+s)} = -\sqrt{H_n(w)}$ annehmen. Da aber für ein ungerades N:

$$A_n(w+s) = -B_n(w)$$

ist, so folgt aus der Gleichung

$$\sqrt{A_n(w+s)}\sqrt{B_n(w+s)} = -\sqrt{A_n(w)}\sqrt{B_n(w)}:$$

$$\frac{\sqrt{A_n(w+s)}}{\sqrt{B_n(w+s)}} = \frac{\sqrt{B_n(w)}}{\sqrt{A_n(w)}}.$$

Wir haben also bei dieser Transformation $\sqrt{A_n(w)}$ und $\sqrt{B_n(w)}$ einfach zu

vertauschen. Die drei Functionen $P_a(w)$ gehen über in:

$$(25.)\quad \begin{cases} Q_1(w) = g(w-w_1)f(w-w_2)f(w-w_3), \\ Q_2(w) = g(w-w_2)f(w-w_3)f(w-w_1), \\ Q_3(w) = g(w-w_3)f(w-w_1)f(w-w_2). \end{cases}$$

Demnach ergiebt sich:

$$(26.)\quad X_{n\pi} = \sum_{a=1}^{3} (L_a\sqrt{B_n(w)}+M_a\sqrt{A_n(w)})Q_a(w).$$

Wir können jetzt die Coefficienten L_a, M_a bestimmen durch die Bedingung, dass sowohl X_n als $X_{n\pi}$ verschwindet für $w = w_a$, $\sqrt{A_n(w)} = \sqrt{A_n(w_a)}$, $\sqrt{B_n(w)} = \sqrt{B_n(w_a)}$.

Für $w = w_a$ ist $Q_a(w)$ von Null verschieden, aber die beiden anderen Functionen Q verschwinden. Daher ergiebt sich aus der Bedingung $X_{n\pi} = 0$:

$$L_a\sqrt{B_n(w_a)}+M_a\sqrt{A_n(w_a)} = 0.$$

Wir setzen dementsprechend:

$$L_a = -C_a\sqrt{A_n(w_a)},\quad M_a = C_a\sqrt{B_n(w_a)}.$$

Dann wird der Ausdruck von X_n (Gleichung (24.)) folgender:

$$X_n = \sum_{a=1}^{3} C_a P_a(w)(\sqrt{B_n(w)}\sqrt{B_n(w_a)}-\sqrt{A_n(w)}\sqrt{A_n(w_a)}).$$

Diesen wollen wir noch etwas modificiren. Es sei:

$$P(w) = g(w-w_1)g(w-w_2)g(w-w_3).$$

Dann ist $P_a(w) = P(w)e(w-w_a)$; und wenn wir nun die Function:

$$(27.)\quad (\sqrt{B_n(w)}\sqrt{B_n(w')}-\sqrt{A_n(w)}\sqrt{A_n(w')})e(w-w')\quad \text{mit}\quad [w, w']$$

bezeichnen, so wird:

$$X_n = P(w)\sum_{a=1}^{3} C_a[w, w_a].$$

Statt $P(w)$ führen wir nun das symmetrische Product

$$(28.)\quad \varDelta = g(w-w_1)g(w-w_2)g(w-w_3)g(w_1-w_2)g(w_1-w_3)g(w_2-w_3)$$

ein, das sich von $P(w)$ nur um einen constanten Factor unterscheidet. Dann ergiebt sich:

$$X_n = \varDelta\sum_{a=1}^{3} C'_a[w, w_a].$$

Wenn wir nun $w = w_a$ werden lassen, so verschwindet X_n, und gleichzeitig $[w, w_a]$; wir erhalten:

$$C'_\beta[w_a, w_\beta] + C'_\gamma[w_a, w_\gamma] = 0.$$

Demnach ist zu setzen:

$$C'_1 = [w_2, w_3]; \quad C'_2 = [w_3, w_1], \quad C'_3 = [w_1, w_2],$$

wodurch der Ausdruck X_n bestimmt ist und auch wirklich alternirend wird in Bezug auf alle vier Punkte:

$$(29.) \quad X_n = \varDelta\{[w, w_1][w_2, w_3] + [w, w_2][w_3, w_1] + [w, w_3][w_1, w_2]\}.$$

In dem Product D ist $\varDelta$ als Factor enthalten, und der andre Factor ist:

$$f(w-w_1)f(w-w_2)\dots f(w_2-w_3).$$

Daher ist:

$$S_n = \frac{[w, w_1][w_2, w_3] + \dots + [w, w_3][w_1, w_2]}{f(w-w_1)f(w-w_2)\dots f(w_2-w_3)},$$

oder, wenn wir jetzt die Ausdrücke (27.) für die Functionen $[w, w']$ einführen:

$$(30.) \quad S_n = \sum_{1,2,3} \frac{(\sqrt{B(w)}\sqrt{B(w_1)} - \sqrt{A(w)}\sqrt{A(w_1)})(\sqrt{B(w_2)}\sqrt{B(w_3)} - \sqrt{A(w_2)}\sqrt{A(w_3)})}{g(w-w_1)g(w_2-w_3)f(w-w_2)f(w-w_3)f(w_1-w_2)f(w_1-w_3)}.$$

Wir haben hier der Einfachheit wegen den Index n bei den Functionen $A_n(w)$, $B_n(w)$ fortgelassen. Führt man die Multiplicationen aus, und berücksichtigt die Gleichung:

$$e(w-w_1)e(w_2-w_3) + \dots + e(w-w_3)e(w_1-w_2) = e(w-w_1)e(w-w_2)\dots e(w_2-w_3),$$

so ergiebt sich:

$$(31.) \quad \begin{cases} S_n = \dfrac{\sqrt{B(w)}\sqrt{B(w_1)}\sqrt{B(w_2)}\sqrt{B(w_3)} + \sqrt{A(w)}\sqrt{A(w_1)}\sqrt{A(w_2)}\sqrt{A(w_3)}}{g(w-w_1)g(w-w_2)\dots g(w_2-w_3)} \\ \quad - \sum\limits_{1,2,3} \dfrac{\sqrt{B(w)}\sqrt{B(w_1)}\sqrt{A(w_2)}\sqrt{A(w_3)} + \sqrt{A(w)}\sqrt{A(w_1)}\sqrt{B(w_2)}\sqrt{B(w_3)}}{g(w-w_1)g(w_2-w_3)f(w-w_2)f(w-w_3)f(w_1-w_2)f(w_1-w_3)}. \end{cases}$$

Uebersichtlicher ist der Ausdruck, der sich hieraus für die zugeordnete Grösse $S_{n,\tau}$ durch die Transformation von w in $w+s$ ergiebt. Setzen wir $w = w_0$, so erhalten wir:

$$(32.) \quad S_{n,\tau} = \sum_{0,1,2,3} \frac{\sqrt{A(w_0)}\sqrt{B(w_1)}\sqrt{B(w_2)}\sqrt{B(w_3)} + \sqrt{B(w_0)}\sqrt{A(w_1)}\sqrt{A(w_2)}\sqrt{A(w_3)}}{f(w_0-w_1)f(w_0-w_2)f(w_0-w_3)g(w_1-w_2)g(w_1-w_3)g(w_2-w_3)}.$$

Wesentlicher als diese umfangreichen Summenausdrücke — die aber doch gegeben werden mussten, weil sie der Zielpunkt der Untersuchung

waren — ist der Satz, der sich mit Evidenz aus diesen Betrachtungen ergiebt:

Die *Abel*schen Functionen, die sich aus den Theta bilden lassen, werden, wenn man für die Argumente Integralsummen einführt:

$$u = u(x, y) + u(x_1, y_1) + \cdots, \quad \text{etc.},$$

rationale symmetrische Functionen der Punkte (x, y), (x_1, y_1), ..., die ungeändert bleiben, wenn man je zwei dieser Punkte mit ihren correspondirenden vertauscht.

Zur Theorie der elliptischen Functionen.

(Von Herrn *Paul Günther*.)

Wenn zwei eindeutige elliptische Functionen (mit denselben Perioden)

$$(1.) \qquad x = \varphi(u), \quad y = \psi(u)$$

gegeben sind, zwischen denen ja immer eine algebraische Gleichung

$$(2.) \qquad f(x, y) = 0$$

bestehen muss, so kann man sich die Aufgabe stellen, auf ***rein algebraischem*** Wege folgende Probleme zu behandeln:

a) Vor Herstellung der Gleichung (2.) zu entscheiden, ob dieselbe vom Range 0 oder 1 ist;

b) im ersteren Falle eine dritte elliptische Function

$$z = \chi(u) = \Re(x, y)$$

aufzustellen, durch welche sich x und y rational ausdrücken lassen, und diese Ausdrücke zu bilden (wiederum ohne Kenntniss von (2.));

c) die Gleichung (2.) herzuleiten.

Die folgenden Untersuchungen sollen einen Beitrag zur Lösung dieser Probleme liefern.

I.

Satz von Herrn *G. Humbert* über den Rang der Gleichung $f(x, y) = 0$.

Herr *G. Humbert* hat den Satz bewiesen: die zwischen zwei elliptischen Functionen

$$(1.) \qquad x = \varphi(u), \quad y = \psi(u)$$

(mit den Perioden 2Ω, $2\Omega'$) bestehende algebraische Gleichung

$$(2.) \qquad f(x, y) = 0$$

ist vom Range 1 oder 0, je nachdem einem willkürlichen Werthepaare (x, y) stets nur ein oder mehrere incongruente Werthe u entsprechen („Sur les courbes de genre un", Thèse, Paris 1885; vergl. auch Comptes rendus Bd. 97, S. 1136, sowie zwei Abhandlungen von Herrn *Otto Schlesinger*, Math. Ann. Bd. 33, S. 444, und Bd. 34, S. 463). Man kann die Richtigkeit dieses Satzes auch auf folgendem Wege darthun.

a) Wenn die Gleichung (2.) vom Range 0 ist, so giebt es eine rationale Function z von x und y, durch welche sich umgekehrt x und y rational ausdrücken lassen. Ist also r der Grad der elliptischen Function z $(r > 1)$, so entsprechen jedem Werthepaar (x, y) r incongruente Werthe u, deren Summe überdies constant ist.

b) Wenn (2.) vom Range 1 ist, so kann diese Gleichung durch eine rationale eindeutig umkehrbare Transformation

$$x = R_1(\xi, \eta), \quad y = R_2(\xi, \eta), \tag{3.}$$

$$\xi = S_1(x, y), \quad \eta = S_2(x, y) \tag{3^a.}$$

in die canonische Form

$$\eta^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3 \tag{2^a.}$$

übergeführt werden, und es wird auch (2^a.) vom Range 1 sein. Dabei können wir festsetzen, dass etwa dem Werthepaar $(\xi = \infty, \eta = \infty)$ das Werthepaar $(x = \varphi(0),\ y = \psi(0))$ entsprechen soll. Aus (3.) ergiebt sich eine neue Parameterdarstellung von (2.):

$$\begin{cases} x = R_1(\wp(v|\omega, \omega'),\ \wp'(v|\omega, \omega')), \\ y = R_2(\wp(v|\omega, \omega'),\ \wp'(v|\omega, \omega')), \end{cases} \tag{4.}$$

bei welcher alle zu einem Werthepaar (x, y) gehörigen Werthe v in der Form

$$v = \bar{v} + 2\mu\omega + 2\mu'\omega' \qquad {\scriptstyle (\mu,\ \mu' = -\infty \cdots +\infty)}$$

erscheinen; $u = 0$ und $v = 0$ sind entsprechende Werthe. Die Gleichungen (3^a.) liefern

$$\begin{cases} \wp(v|\omega, \omega') = S_1(\varphi(u), \psi(u)) \\ \qquad\qquad\quad = \mathfrak{S}_1(\wp(u|\Omega, \Omega'),\ \wp'(u|\Omega, \Omega')), \\ \wp'(v|\omega, \omega') = \mathfrak{S}_2(\wp(u|\Omega, \Omega'),\ \wp'(u|\Omega, \Omega')), \end{cases} \tag{5.}$$

und hieraus folgt

$$\frac{dv}{du} = \mathfrak{S}(\wp(u|\Omega, \Omega'),\ \wp'(u|\Omega, \Omega')); \tag{6.}$$

($\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ bedeuten rationale Functionen der eingeklammerten Argumente $\wp$, $\wp'$). Würde nun v für einen *endlichen* Werth u unendlich werden, so würde es ein *bestimmtes* Paar (x, y), also auch ein *bestimmtes* (ξ, η), geben, für welches

$$v = \int_{\infty}^{\xi} \frac{d\xi}{\eta}$$

unendlich würde, was nicht angeht. Nach (6.) ist daher

$$v = au \tag{7.}$$

($a = \text{const.}$), es haben also die zu einem Werthepaar (x, y) gehörigen Werthe u sämmtlich die Form

$$u = \bar{u} + 2\mu \cdot \frac{\omega}{a} + 2\mu' \cdot \frac{\omega'}{a} \qquad (\mu,\ \mu' = -\infty \cdots +\infty).$$

Hieraus folgt aber: wenn in dem Periodenparallelogramm $(2\Omega, 2\Omega')$ jedem Werthepaar (x, y) $r (> 1)$ Werthe u entsprechen, so kann dieses Parallelogramm kein primitives sein.

Wir haben also gezeigt: Wenn Gleichung (2.) vom Range Null ist, entsprechen jedem Werthepaar (x, y) *mehrere* Werthe, im Falle des Ranges Eins nur *ein* Werth u in jedem Periodenparallelogramm (natürlich primitive Perioden vorausgesetzt). Damit ist aber auch der Satz von Herrn *Humbert* bewiesen.

Wir bemerken noch Folgendes: die Gleichungen (5.) sind nach (7.) zu ersetzen durch

$$\wp\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{a}, \frac{\omega'}{a}\right) = R(\wp(u|\Omega, \Omega')) \tag{8.}$$

(R eine rationale Function); es müssen also Gleichungen von der Form

$$\begin{cases} \Omega = m \cdot \dfrac{\omega}{a} + m' \cdot \dfrac{\omega'}{a}, \\ \Omega' = n \cdot \dfrac{\omega}{a} + n' \cdot \dfrac{\omega'}{a} \end{cases} \tag{9.}$$

bestehen (m, m', n, n' ganzzahlig), wobei

$$\begin{vmatrix} m & m' \\ n & n' \end{vmatrix} = r$$

ist; r bedeutet, wie oben, die Anzahl der modd. 2Ω, $2\Omega'$ incongruenten Werthe u, welche einem (x, y) entsprechen, — diese Zahl ist nämlich die

Ordnung der durch (8.) ausgedrückten Transformation elliptischer Functionen. Aus (9.) ergiebt sich sofort, dass für $r > 1$ einerseits, wie schon bemerkt, $(2\Omega, 2\Omega')$ kein primitives Periodenpaar sein kann, andererseits die Grössen $\frac{2\Omega}{r}$, $\frac{2\Omega'}{r}$ überhaupt keine Perioden sind, was eine Behauptung von Herrn *O. Schlesinger* (Math. Ann. Bd. 34, S. 463) richtig stellt.

Ehe wir nun ein Verfahren angeben, das in dem *Humbert*schen Satze ausgesprochene Kriterium für die Feststellung des Ranges von (2.) algebraisch zu fixiren, wollen wir uns zunächst zur Behandlung des dritten der obigen Probleme wenden, um gewisse sich dabei ergebende Hülfsmittel für die Lösung der beiden anderen Aufgaben benutzen zu können.

II.

Bildung der zwischen zwei elliptischen Functionen bestehenden algebraischen Gleichung.

Bei der Herleitung der zwischen den Functionen

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u) \tag{1.}$$

bestehenden algebraischen Gleichung setzen wir mit Herrn *Hermite* (dieses Journal Bd. 82, S. 343 ff.) der Uebersichtlichkeit wegen voraus, dass $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ lauter *einfache* Unendlichkeitsstellen besitzen; die im allgemeinen Falle erforderlichen Modificationen wird man leicht übersehen. Dann können wir, indem wir nöthigenfalls u, x, y durch lineare Functionen $u+u_0$, $\alpha x+\beta y$, $\alpha' x+\beta' y$ ersetzen, die Gleichungen (1.) in der Form

$$\begin{cases} x = x_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i \cdot \frac{\sigma'(u-a_i)}{\sigma(u-a_i)}, \\ y = y_0 + \sum_{i=1}^{m} B_i \cdot \frac{\sigma'(u-a_i)}{\sigma(u-a_i)} \end{cases} \tag{1^a.} \qquad (\Sigma A_i = \Sigma B_i = 0)$$

annehmen, wobei keine der Grössen a_i, A_i, B_i den Werth Null haben soll.

Mit Hülfe der Formel

$$\frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} - \frac{\sigma' v}{\sigma v} + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v}$$

ersetzen wir die Gleichungen (1^a.) durch folgende:

$$\begin{cases} x = \Sigma A_i \cdot \frac{\wp' u + \wp' a_i}{\wp u - \wp a_i}, \\ y = \Sigma B_i \cdot \frac{\wp' u + \wp' a_i}{\wp u - \wp a_i}, \end{cases} \tag{2.}$$

(indem wir von x und y je eine Constante abziehen und für $\frac{1}{2}A_i$, $\frac{1}{2}B$ wieder A_i, B_i schreiben).

Führen wir weiter die Bezeichnungen ein:

$$t = \wp u, \quad t_i = \wp a_i, \quad t'_i = \wp' a_i,$$

$$(3.)\quad \begin{cases} L(t) = \prod_{i=1}^{m}(t-t_i), \\ \frac{M_1(t)}{L(t)} = \sum_{i=1}^{m}\frac{A_i t'_i}{t-t_i}, \quad \frac{M_2(t)}{L(t)} = \sum_{i=1}^{m}\frac{B_i t'_i}{t-t_i}, \\ \frac{N_1(t)}{L(t)} = \sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{t-t_i}, \quad \frac{N_2(t)}{L(t)} = \sum_{i=1}^{m}\frac{B_i}{t-t_i}, \end{cases}$$

so wird

$$(4.)\quad x = \frac{M_1(t)+\wp' u . N_1(t)}{L(t)}, \quad y = \frac{M_2(t)+\wp' u . N_2(t)}{L(t)}.$$

Zwischen x, y, t bestehen also die drei Gleichungen

$$(5.)\quad L^2(t).x^2-2L(t)M_1(t).x = N_1^2(t).S(t)-M_1^2(t),$$

$$(5^a.)\quad L^2(t).y^2-2L(t)M_2(t).y = N_2^2(t).S(t)-M_2^2(t),$$

$$(5^b.)\quad \frac{L(t).x-M_1(t)}{N_1(t)} = \frac{L(t).y-M_2(t)}{N_2(t)},$$

wobei

$$S(t) = 4t^3-G_2t-G_3$$

(G_2, G_3 die zu den primitiven Perioden 2Ω, $2\Omega'$ gehörenden Invarianten) gesetzt ist.

Zwischen x und t muss aber eine Gleichung bestehen, die in x vom zweiten, in t vom $m$ten Grade ist, und zwar, da x nur für $t = t_i$ ($i = 1, 2, \dots m$) unendlich wird, von der Form

$$(6.)\quad L(t).x^2-2f_1(t).x-f_2(t) = 0,$$

ebenso

$$(6^a.)\quad L(t).y^2-2g_1(t).y-g_2(t) = 0;$$

dabei können die ganzen Functionen f_1, f_2, g_1, g_2 nur vom $(m-1)$ten Grade sein, da t nur für $x = 0$, bezw. $y = 0$, unendlich wird (für $u = 0$ sind nämlich x, y beide Null nach (2.)). Durch Vergleichung mit (5.), (5^a.) findet sich

$$(7.)\quad \begin{cases} f_1(t) = M_1(t), \quad g_1(t) = M_2(t), \\ f_2(t) = \frac{N_1^2(t).S(t)-M_1^2(t)}{L(t)}, \quad g_2(t) = \frac{N_2^2(t).S(t)-M_2^2(t)}{L(t)}. \end{cases}$$

In der That ist $N_k^2S-M_k^2$ ($k = 1, 2$) durch L theilbar, weil es für $t = t_i$

($i = 1, 2, \dots m$) verschwindet; zugleich ergiebt sich so nochmals die Richtigkeit der obigen Gradbestimmung. Wir können auch f_2, g_2 mit Hülfe der *Lagrange*schen Interpolationsformel direct ausdrücken durch die Werthe, welche diese beiden Functionen an den Stellen $t = t_i$ annehmen; entweder nach (7.) oder einfacher durch folgende Betrachtung.

Für $t = t_i$ kann $u = a_i$ oder $= -a_i$ sein, dem ersteren Werthe entspricht $x = \infty$, dem zweiten (für $t_i'' = \wp'' a_i = 6t_i^2 - \frac{1}{2}G_2$)

$$x = -A_i \cdot \frac{t_i''}{t_i'} - \sum_{k \neq i} A_k \cdot \frac{t_i' - t_k'}{t_i - t_k};$$

es muss also zufolge (6.)

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{f_2(t_i)}{f_1(t_i)} = -A_i \frac{t_i''}{t_i'} - \sum_{k \neq i} A_k \cdot \frac{t_i' - t_k'}{t_i - t_k}.$$

sein; da nun $f_1(t_i) = A_i . t_i' . L'(t_i)$ bekannt ist, so ist $f_2(t_i)$ ($i = 1, \dots m$) und damit $f_2(t)$ bestimmt, ebenso $g_2(t)$.

Wir schreiben noch der Gleichmässigkeit wegen

$$(7^a.) \qquad f_0(t) = N_1(t), \quad g_0(t) = N_2(t),$$

sodass

$$(8.) \qquad f_2 = \frac{f_0^2 . S - f_1^2}{L}, \quad g_2 = \frac{g_0^2 . S - g_1^2}{L}$$

und

$$(6^b.) \qquad f_0(t) y - g_0(t) x = M(t)$$

ist, wo

$$(9.) \qquad M(t) = \frac{f_0(t) . g_1(t) - f_1(t) g_0(t)}{L(t)}$$

eine *ganze* Function bedeutet, welche auch wiederum durch ihre aus (6^b.) oder (9.) zu entnehmenden Werthe für $t = t_i$ direct ausgedrückt werden kann.

Die drei Gleichungen zwischen x, y, t lauten also

$$(6.) \qquad L(t) x^2 - 2 f_1(t) x - f_2(t) = 0,$$

$$(6^a.) \qquad L(t) y^2 - 2 g_1(t) y - g_2(t) = 0,$$

$$(6^b.) \qquad Q(x, y, t) = f_0(t) y - g_0(t) x - M(t) = 0,$$

wo die f_i, g_i und M nach dem Obigen wohlbestimmte ganze rationale Functionen sind.

Um nun die zwischen x und y bestehende Gleichung

$$f(x, y) = 0$$



herzuleiten, werden wir t aus (6.), (6^b.) eliminiren; da hierbei ein fremder Factor auftritt, muss eine genaue Gradbestimmung der Resultante vorgenommen werden, zu welcher wir das bekannte *Minding*sche Verfahren (dieses Journal, Bd. 22) benutzen.

Bezeichnen wir mit $\tau_1, \dots \tau_m$ die m conjugirten Werthe von t, welche zufolge (6.) einem x entsprechen, so wird die Eliminationsresultante von (6.) und (6^b.):

$$\Phi(x, y) = x^{2(m-2)}.\prod_{i=1}^{m} Q(x, y, \tau_i).$$

Um den Grad von Φ in Bezug auf x zu bestimmen, entwickeln wir nach fallenden Potenzen von x:

$$\tau_i = t_i + \frac{1}{x}\cdot\mathfrak{P}_i\left(\frac{1}{x}\right),$$

und finden so, dass Φ in Bezug auf x vom $(3m-4)$ten, in Bezug auf y vom $m$ten Grade ist. Aber $f(x, y)$ ist in x sowohl als in y vom $m$ten Grade, ausserdem auch von der Ordnung m (*Hermite*, a. a. O. S. 345); also folgt

$$(10.)\qquad \Phi(x, y) = f(x, y).\Phi(x),$$

wo $\Phi(x)$ eine ganze Function $(2m-4)$ten Grades bedeutet. Wir können dieselbe direct bestimmen. Die Wurzeln der Gleichung

$$\Phi(x) = 0$$

sind diejenigen Werthe x, für welche (6.) und (6^b.) eine gemeinsame Wurzel t haben *unabhängig davon, welchen Werth man dem y beilege.* Für solche Werthe x, t müssen aber offenbar die beiden Gleichungen

$$(11.)\qquad \begin{cases} f_0(t) = 0, \\ g_0(t).x + M(t) = 0 \end{cases}$$

(und ausserdem (6.)) erfüllt sein (es sind dies die Werthe

$$t = \vartheta_i, \quad x = \frac{f_1(\vartheta_i)}{L(\vartheta_i)} \qquad (i = 1, \dots m-2),$$

wo $\vartheta_1, \dots \vartheta_{m-2}$ die Wurzeln der Gleichung $f_0 = 0$ bedeuten). Bezeichnen wir also mit $\Psi(x)$ die Resultante der Gleichungen (11.) bei Elimination von t, wo Ψ eine ganze Function $(m-2)$ten Grades bedeutet, so ist

$$(12.)\qquad \Phi(x) = \Psi^2(x),$$

und somit haben wir den Ausdruck von $f(x, y)$ hergestellt:

$$(13.)\qquad f(x, y) = \frac{\Phi(x, y)}{\Psi^2(x)}.$$

III.

Reductibilität oder Irreductibilität der Gleichung $f(x, y) = 0$; Verfahren zur Feststellung des Ranges.

Die Gleichung

$$(1.) \qquad f(x, y) = 0,$$

welche wir soeben hergestellt haben, kann offenbar nur entweder irreductibel oder ganzzahlige Potenz einer irreductiblen Gleichung sein, da man von jeder Stelle (X, Y_i) des durch (1.) definirten algebraischen Gebildes zu jeder conjugirten (X, Y_k) $(i, k = 1, \dots m)$ gelangen kann.

Wenn (1.) vom Range 1 ist, so sind die m Werthe $Y_1, \dots Y_m$ von y, welche einem Werthe $x = X$ entsprechen, alle von einander verschieden (singuläre X ausgenommen), weil ja einem Werthepaar (X, Y_i) nur *ein* Werth $u = U_i$ entspricht; daher muss in diesem Falle (1.) irreductibel sein.

Im Falle des Ranges 0 sei q die Anzahl der von einander verschiedenen Werthe $Y_1, \dots Y_q$ von y, die einem nichtsingulären Werthe $x = X$ entsprechen; dann gehören zu jedem Werthepaar (X, Y_i) nach I. r Werthe u, und die Gesammtheit dieser $q.r$ Werthe stimmt überein mit derjenigen der m Werthe u, welche zu $x = X$ gehören; es ist also

$$(2.) \qquad q = \frac{m}{r}$$

und

$$(3.) \qquad f(x, y) = f_1^r(x, y),$$

wo $f_1(x, y)$ eine irreductible ganze Function bedeutet.

Die Gleichung (1.) hat also den Rang 0 oder 1, je nachdem sie reductibel oder irreductibel ist. (Vgl. *Humbert*, Thèse, S. 33.)

Wir wollen nun angeben, wie man ein Kriterium hierfür aufstellen kann, welches nicht die Bildung von (1.) verlangt, sondern nur die der Gleichungen (6.), (6^b.) voriger Nummer.

Im Falle des Ranges 1 haben diese beiden Gleichungen für jedes nichtsinguläre Paar (x, y) nur *eine* Wurzel $t = \wp u$ gemeinsam, im Falle des Ranges 0 dagegen r Wurzeln t.

Die Bedingungen für letzteren Fall können in bekannter Weise hergestellt werden: es muss eine Anzahl ganzer rationaler Functionen von x und y identisch verschwinden, während von einer Anzahl anderer mindestens *eine* nicht verschwindet; dies liefert eine endliche Anzahl algebraischer Bedingungen für die in $\varphi(u)$, $\psi(u)$ auftretenden Constanten. Wir gehen hierauf nicht näher ein. —



Es ist noch zu bemerken, dass im Fall des Ranges 1 die gemeinsame Wurzel t der Gleichungen (6.), (6^b.) voriger Nummer sich rational durch die Coefficienten dieser Gleichungen, d. h. durch x, y, ausdrücken lässt, während im Fall des Ranges 0 eine Gleichung $r$ten Grades mit in x, y rationalen Coefficienten

$$(4.) \qquad t^r + R_1(x,y)t^{r-1} + \cdots + R_r(x,y) = 0$$

nach bekannter Vorschrift gebildet werden kann, welche die r gemeinsamen Wurzeln jener Gleichungen liefert.

IV.

Rationale Parameterdarstellung im Fall des Ranges 0.

Es erübrigt nun noch, für den Fall des Ranges 0 ein algebraisches Verfahren anzugeben zur Herstellung der elliptischen Function

$$(1.) \qquad z = R(x,y) = \chi(u),$$

durch welche sich x und y rational ausdrücken lassen:

$$(2.) \qquad x = R_1(z), \quad y = R_2(z),$$

und zur Bildung der Ausdrücke (2.).

Die Function $\chi(u)$ ist (No. I.) eine elliptische Function $r$ten Grades; zwischen z und $t = \wp u$ muss also eine Gleichung

$$(3.) \qquad \bar{L}(t).z^2 - 2h_1(t).z - h_2(t) = 0$$

bestehen, die in t vom $r$ten Grade ist; ferner muss

$$(4.) \qquad z = \frac{h_0(t).\wp' u + h_1(t)}{\bar{L}(t)}$$

sein, wo

$$h_2(t) = \frac{h_0^2(t).S(t) - h_1^2(t)}{\bar{L}(t)}$$

ist (Vgl. No. II.). Wir bestimmen z, was nach der Theorie der algebraischen Gebilde möglich sein muss, durch folgende Bedingungen: *a*) für $(x,y) = (0,0)$ soll z verschwinden; die zugehörigen Werthe t sind $t = \infty$ und $r-1$ endliche Werthe, die aus (4.) voriger Nummer zu bestimmen sind. Hierdurch ist $h_2(t)$ bestimmt; zugleich ergiebt sich, dass $h_1(t)$ und daher auch $h_0(t)$ nur vom $(r-1)$ten Grade sind, da dem Werthe $t = \infty$ nur $z = 0$ entspricht. *b*) Für ein willkürliches Werthepaar (x_0, y_0) (welches nur so gewählt werden soll, dass die zugehörigen Werthe t alle ungleich

sind) soll $z = \infty$ werden; hierdurch ist $\bar{L}(t)$ gegeben. *c*) Für ein ebenfalls willkürliches Werthepaar (x_1, y_1) soll $z = z_0$ (endlich und von Null verschieden) werden; dadurch sind $h_1(t)$ und $h_0(t)$ bestimmt. Die Coefficienten aller dieser Functionen setzen sich rational aus den Grössen $R_\alpha(0, 0)$, $R_\alpha(x_0, y_0)$, $R_\alpha(x_1, y_1)$ $(\alpha = 1, \dots r$, vgl. (4.) voriger Nummer) zusammen, weil überall nur die symmetrischen Functionen der betreffenden t-Werthe auftreten.

Nachdem so der Ausdruck von z gefunden ist, kann man, ohne $f(x, y) = 0$ zu kennen, die zwischen (x, z) und (y, z) bestehenden Gleichungen

$$g(x, z) = 0, \quad h(y, z) = 0$$

herleiten; gemäss No. III. müssen dieselben nach Division durch eine ganze Function von z mit

$$[x - R_1(z)]^r = 0, \quad [y - R_2(z)]^r = 0$$

übereinstimmen, wodurch R_1 und R_2 gegeben sind.

Ueber den Vergleich des arithmetischen und des geometrischen Mittels.

(Von Herrn *A. Hurwitz* in Königsberg i. Pr.)

In den folgenden Zeilen will ich einen neuen Beweis für den Satz geben, dass das arithmetische Mittel aus n positiven Grössen $a_1, a_2, \dots a_n$, abgesehen von dem Falle, wo diese Grössen sämmtlich einander gleich sind, stets einen grösseren Werth besitzt als ihr geometrisches Mittel *). Dieser Beweis beruht auf dem Umstande, dass es gelingt, die Differenz zwischen beiden Mitteln als eine Summe darzustellen, deren einzelne Glieder ihrer Natur nach nicht negativ werden können.

Um diese Darstellung zu erhalten, setze ich zunächst

$$\sqrt[n]{a_1} = x_1, \quad \sqrt[n]{a_2} = x_2, \quad \dots \quad \sqrt[n]{a_n} = x_n,$$

wo $x_1, x_2, \dots x_n$ reelle positive Grössen bedeuten. Dann stellt sich die Differenz zwischen den beiden Mitteln der Grössen $a_1, a_2, \dots a_n$ in der Form dar:

$$(1.) \qquad \varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n}{n} - x_1 x_2 \dots x_n.$$

Man verstehe nun unter dem Zeichen

$$\Sigma f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

die Summe der $n!$ Grössen, welche aus $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ durch alle möglichen Permutationen von $x_1, x_2, \dots x_n$ hervorgehen.

Hiernach ist z. B.

$$\Sigma x_1^n = (n-1)!(x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n)$$

und

---

*) Eine ganze Reihe interessanter Sätze über die Grössenverhältnisse verschiedener Mittelwerthe findet man in einer Notiz des Herrn *Schlömilch:* „Ueber Mittelgrössen verschiedener Ordnungen". (Zeitschrift für Mathematik u. Physik, Bd. 3, pag. 301.)

$$\Sigma x_1 x_2 \dots x_n = n! x_1 x_2 \dots x_n,$$

so dass

$$(2.) \qquad \Sigma x_1^n - \Sigma x_1 x_2 \dots x_n = n! \varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$$

wird. Ferner besteht offenbar allgemein die Gleichung:

$$(3.) \qquad \Sigma f(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma f(x_\alpha, x_\beta, \dots x_\lambda),$$

wenn die Zahlen $\alpha, \beta, \dots \lambda$ in irgend einer Reihenfolge mit den Zahlen $1, 2, \dots n$ übereinstimmen.

Dies vorausgeschickt, betrachte man nun die folgenden $n-1$ Formen:

$$(4.) \qquad \begin{cases} \varphi_1 = \Sigma(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})(x_1 - x_2), \\ \varphi_2 = \Sigma(x_1^{n-2} - x_2^{n-2})(x_1 - x_2) x_3, \\ \varphi_3 = \Sigma(x_1^{n-3} - x_2^{n-3})(x_1 - x_2) x_3 x_4, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varphi_{n-1} = \Sigma(x_1 - x_2)(x_1 - x_2) x_3 x_4 \dots x_n. \end{cases}$$

Durch Auflösung der Klammern rechter Hand findet man

$$\varphi_1 = \Sigma x_1^n - \Sigma x_1^{n-1} x_2 - \Sigma x_2^{n-1} x_1 + \Sigma x_2^n,$$

ein Ausdruck, welcher sich zufolge (3.) auf $2\Sigma x_1^n - 2\Sigma x_1^{n-1} x_2$ reducirt. Formt man in ähnlicher Weise $\varphi_2, \varphi_3, \dots \varphi_{n-1}$ um, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 2\Sigma x_1^n - 2\Sigma x_1^{n-1} x_2, \\ \varphi_2 &= 2\Sigma x_1^{n-1} x_2 - 2\Sigma x_1^{n-2} x_2 x_3, \\ \varphi_3 &= 2\Sigma x_1^{n-2} x_2 x_3 - 2\Sigma x_1^{n-3} x_2 x_3 x_4, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varphi_{n-1} &= 2\Sigma x_1^2 x_2 x_3 \dots x_{n-1} - 2\Sigma x_1 x_2 x_3 \dots x_n. \end{aligned}$$

Die Summe der rechten Seiten dieser Gleichungen ist

$$2\Sigma x_1^n - 2\Sigma x_1 x_2 \dots x_n,$$

so dass also die Gleichung gilt:

$$(5.) \qquad \varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{1}{2.n!} [\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_{n-1}].$$

Andererseits lassen sich die Formen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}$ offenbar in folgende Gestalt bringen:

$$(6.) \qquad \begin{cases} \varphi_1 = \Sigma(x_1^{n-2} + x_1^{n-3} x_2 + \dots + x_1 x_2^{n-3} + x_2^{n-2})(x_1 - x_2)^2, \\ \varphi_2 = \Sigma(x_1^{n-3} + x_1^{n-4} x_2 + \dots + x_1 x_2^{n-4} + x_2^{n-3})(x_1 - x_2)^2 x_3, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varphi_{n-1} = \Sigma(x_1 - x_2)^2 x_3 x_4 \dots x_n. \end{cases}$$

Es erscheint daher die Form $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ vermöge der Gleichung (5.) als eine Summe von lauter Formen, welche für positive Werthe von $x_1, x_2, \dots x_n$ positiv sind und nur in dem Falle $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ verschwinden. Aus dieser Darstellung der Form $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ geht die Richtigkeit des eingangs genannten Satzes unmittelbar hervor.

Wenn n eine gerade Zahl ist, so erkennt man leicht, dass $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ für alle reellen (positiven und negativen) Werthsysteme von $x_1, x_2, \dots x_n$ positiv ist. Man wird daher vermuthen, dass in diesem Falle φ als eine Summe von lauter Quadraten darstellbar ist*). In der That findet man auf folgende Weise eine solche Darstellung.

Es sei $n = 2m$; dann ist, wie man ohne Weiteres verificirt,

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_{2m}) = \tfrac{1}{2}\varphi(x_1^2, x_2^2, \dots x_m^2) + \tfrac{1}{2}\varphi(x_{m+1}^2, x_{m+2}^2, \dots x_{2m}^2) + \tfrac{1}{2}(x_1 x_2 \dots x_m - x_{m+1} x_{m+2} \dots x_{2m})^2.$$

Ersetzt man hier auf der rechten Seite die Formen φ durch die vermöge der Gleichungen (5.) und (6.) sich ergebenden Ausdrücke, so erscheint nun $\varphi(x_1, x_2, \dots x_{2m})$ als eine Summe von lauter Quadraten dargestellt.

*) Die Möglichkeit einer solchen Darstellung ist freilich nicht von vorn herein klar. Es giebt nämlich, wie Herr *Hilbert* (Mathematische Annalen Bd. 32, p. 342) gezeigt hat, positive Formen, welche *nicht* als Summen von Formenquadraten darstellbar sind.

Die *Hesse*sche Configuration (12_4, 16_3).

(Von Herrn *H. Schroeter* in Breslau.)

In der Abhandlung: „Ueber Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Punkten berühren" (dieses Journal Bd. 36, S. 153), hat *Hesse* zuerst auf eine merkwürdige ebene Configuration aufmerksam gemacht, in welcher 12 Punkte zu je dreien auf 16 Geraden liegen und je vier der letzteren durch jeden der 12 Punkte laufen. Diese Figur wird gebildet von den 12 Berührungspunkten der Tangenten aus drei in gerader Linie liegenden Punkten einer Curve dritter Ordnung. Eine eingehende Untersuchung dieser Figur hat Herr *Durège* in seinem Buche: „Die ebenen Curven dritter Ordnung" (Leipzig 1871), siebenter Abschnitt S. 205—235 gegeben, und der Verfasser ist in seiner „Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung" (Leipzig 1888) § 13, S. 99 von synthetischem Standpunkte aus auf diese Configuration zurückgekommen.

Herr *J. de Vries* zeigt in der Abhandlung: „Ueber gewisse ebene Configurationen" (Acta mathematica 12:1, S. 63), dass nur zwei wesentlich verschiedene Configurationen (12_4, 16_3) möglich sind (siehe § 11), von denen die erste (A) identisch ist mit der *Hesse*schen Figur, während mit der zweiten (B) in einem besonderen Falle diejenige Configuration übereinstimmt, auf welche von anderem Ausgangspunkte aus Herr *Hurwitz* in seinem Aufsatze: „Ueber die *Schroeter*sche Construction der ebenen Curven dritter Ordnung" (dieses Journal Bd. 107, S. 143) hingewiesen hat (s. § 14).

In der Abhandlung von Herrn *J. de Vries* nimmt die Configuration (A) das Hauptinteresse in Anspruch, indem sich nicht allein eine Reihe sehr eigenthümlicher Lagenverhältnisse in der Figur herausstellt, sondern auch verschiedene andere Configurationen aus derselben hervorgehen. Diese Betrachtungen stützen sich wesentlich auf Eigenschaften der Curve dritter Ordnung, aus welcher ja auch die Configuration selbst entsprungen ist.

Allein die Figur an und für sich lässt eine ganz elementare Construction und eine Herleitung ihrer Eigenschaften zu, welche nicht der Hülfe der Curve dritter Ordnung bedarf, sondern sich lediglich auf den *Désargues*schen, den *Pascal*schen und *Brianchon*schen Satz stützt, also wesentlich elementarer Natur ist. Diese Herleitung, welche auf Priorität keinen Anspruch macht, aber ihres elementaren Charakters wegen dem Verfasser nicht überflüssig erscheint, vielmehr nach verschiedenen Seiten hin einer Weiterführung fähig ist, möge in der folgenden Darstellung den Freunden synthetisch-geometrischer Forschung dargeboten sein*).

§ 1.

Construction der Configuration $(12_4, 16_3)$.

Wir gehen von zwei perspectiv liegenden Dreiecken aus:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_2 \\ \hline \end{array},$$

bei denen sich die Verbindungslinien entsprechender Ecken $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2|$ $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2|$ $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2|$ in einem Punkte $(\mathfrak{A}_4)$ schneiden, und bestimmen die Schnittpunkte:

$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2, \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1) = \mathfrak{a}_3; \quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{b}_3; \quad (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{c}_3;$$
$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1, \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2) = \mathfrak{a}_4; \quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1, \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{b}_4; \quad (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{c}_4;$$

dann müssen nach dem *Désargues*schen Satze nicht allein die Punkte $|\mathfrak{a}_4\ \mathfrak{b}_4\ \mathfrak{c}_4|$ auf einer Geraden liegen, sondern auch wegen der gleichfalls perspectiven Lage der Dreieckspaare:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_1 \\ \hline \end{array}$$

je drei Punkte auf einer Geraden:

$$|\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_4| \quad |\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4|.$$

Wir erhalten dadurch 12 Punkte $\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_i\mathfrak{c}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, die zu je dreien auf 16 Geraden liegen, während durch jeden Punkt vier dieser Geraden laufen.

---

*) Nach Vollendung des Manuscriptes ging dem Verfasser die Abhandlung von Herrn *V. Martinetti* zu: „Sopra un gruppo di configurazioni regolari, contenuto nell' essagrammo di Pascal“ (Degli Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania Vol. III. Ser. 4ª.). Da diese Abhandlung einen anderen Ausgangspunkt, nämlich die vollständige Figur des *Pascal*schen Sechsecks, wählt und sich wesentlich auf die Eigenschaften der Curve dritter Ordnung stützt, wie die Abhandlung von Herrn *J. de Vries*, so glaubt der Verfasser trotz der Uebereinstimmung eines Theiles der Resultate seine elementare Herleitung nicht zurückziehen zu müssen.

Dies ist die Configuration $(12_4, 16_3)$*):

$$(k.)\quad \begin{cases} |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1| \\ |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2| \\ |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3| \\ |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4|. \end{cases}$$

Zu derselben Configuration können wir auch auf folgende zweite Art gelangen:

Wir gehen von den beiden perspectiv liegenden Dreiecken aus:

$$\frac{\begin{matrix}\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3\end{matrix}}{\mathfrak{c}_4},$$

deren Perspectivitäts-Centrum

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3) = \mathfrak{c}_4$$

ist, und bestimmen die Schnittpunkte:

$$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3, \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{c}_1; \quad (\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3) = \mathfrak{c}_2; \quad (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{c}_3;$$
$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1, \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2) = \mathfrak{a}_4; \quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1, \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{b}_4;$$

dann müssen nach dem *Désargues*schen Satze wegen der perspectiven Lage der Dreieckspaare:

$$\frac{\begin{matrix}\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3\end{matrix}}{(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3), \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3;} \qquad \frac{\begin{matrix}\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_3\end{matrix}}{(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3), \mathfrak{c}_3, \mathfrak{c}_1;} \qquad \frac{\begin{matrix}\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{a}_3\end{matrix}}{(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2), \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2}$$

in je einer Geraden liegen, d. h.

$$|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3|\,|\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3|\,|\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3|; \quad |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3|\,|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3|\,|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3|; \quad |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2|\,|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2|\,|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2|$$

sich in je einem Punkte schneiden; hiernach findet wiederum perspective Lage der Dreieckspaare statt:

$$\frac{\begin{matrix}\mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_2\end{matrix}}{} \qquad \frac{\begin{matrix}\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_2\end{matrix}}{} \qquad \frac{\begin{matrix}\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_2\end{matrix}}{},$$

und da nach dem *Désargues*schen Satze die lineale Lage eine Folge der perspectiven ist, so liegen endlich die je drei Punkte auf einer Geraden:

$$|\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4|,$$

und somit sehen wir die 16 Geraden der Configuration aus der obigen Construction hervorgehen.

---

*) Vgl. auch *L. Wedekind:* „Lagenbeziehungen bei ebenen perspectivischen Dreiecken" (Math. Annalen Bd. 16, S. 209).

Eine dritte Construction derselben Configuration lässt sich in folgender Weise herstellen:

Wir nehmen auf einer Geraden drei beliebige Punkte

$$\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{c}_3$$

und auf einer zweiten beliebigen Geraden drei Punkte

$$\mathfrak{b}_3 \quad \mathfrak{c}_1 \quad \mathfrak{a}_2,$$

endlich auf der Verbindungslinie $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3|$ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{c}_2$, dann werden die Schnittpunkte:

$(\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2, \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3) = \mathfrak{a}_4$, $(\mathfrak{a}_4\mathfrak{c}_1, \mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_3) = \mathfrak{b}_1$, $(\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2, \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1) = \mathfrak{a}_3$, $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1, \mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2) = \mathfrak{b}_4$, $(\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3) = \mathfrak{c}_4$

die übrigen ergänzenden Punkte der Configuration liefern, und zu den bereits vorhandenen 13 Configurations-Geraden treten die drei letzten; denn wir haben in perspectiver Lage die beiden Dreiecke:

$$\frac{\begin{array}{ccc}\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_3\end{array}}{\mathfrak{a}_4}$$

und schliessen daher aus ihrer linealen Lage, dass

$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3), \quad \mathfrak{a}_3, \quad \mathfrak{a}_1$$

in einer Geraden liegen, d. h.

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3| \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3| \quad |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3|$$

sich in einem Punkte schneiden. Nun folgt aus der perspectiven Lage der Dreieckspaare:

$$\frac{\begin{array}{ccc}\mathfrak{a}_3 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{c}_1\end{array}}{|\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1|\,|\mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_3|\,|\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2|}$$

schneiden sich in einem Punkte, also liegen $|\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3|$ auf einer Geraden;

$$\frac{\begin{array}{ccc}\mathfrak{a}_3 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_3\end{array}}{|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|\,|\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3|\,|\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2|}$$

schneiden sich in einem Punkte, also liegen $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4|$ auf einer Geraden;

ferner schliessen wir aus der perspectiven Lage des Dreieckspaares:

$$\frac{\begin{array}{ccc}\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3\end{array}}{\mathfrak{a}_4},$$

dass $|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3|$ $|\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3|$ $|\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3|$ sich in einem Punkte schneiden, und endlich aus der perspectiven Lage des Dreieckspaares:

$$\frac{\begin{array}{ccc}\mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{c}_3\end{array}}{},$$

dass $|\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4|$ in einer Geraden liegen, wodurch die 16 Geraden der Configuration erschöpft sind.

§ 2.

Construction der conjugirten Configuration.

Gehen wir von der ersten Construction des vorigen Paragraphen aus, wonach die drei Geraden

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2| \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2| \quad |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2|$$

durch einen Punkt laufen und die übrigen sechs Configurations-Punkte sich als die Schnittpunkte ergeben:

$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1) = \mathfrak{a}_3, \quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{b}_3, \quad (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{c}_3,$$
$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2) = \mathfrak{a}_4, \quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{b}_4, \quad (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{c}_4,$$

welche zu je dreien auf den vier Geraden liegen

$$|\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4|,$$

so folgt hieraus:

$$(\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3,\ \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2) = \mathfrak{a}_1; \quad (\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{b}_1; \quad (\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3,\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{c}_1,$$
$$(\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3) = \mathfrak{a}_4; \quad (\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_3) = \mathfrak{b}_4; \quad (\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3,\ \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{c}_4,$$

und da $\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4$ auf einer Geraden liegen, so ergiebt die Umkehrung des *Désargues*schen Satzes, dass

$$|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3| \quad |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3| \quad |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3|$$

sich in einem Punkte schneiden müssen.

Ebenso werden, weil

$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3,\ \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1) = \mathfrak{a}_2; \quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{b}_2; \quad (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3,\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{c}_2;$$
$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3) = \mathfrak{a}_4; \quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_3) = \mathfrak{b}_4; \quad (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3) = \mathfrak{c}_4$$

ist und $\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4$ auf einer Geraden liegen, auch

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3| \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3| \quad |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3|$$

sich in einem Punkte schneiden müssen.

Betrachten wir nun das vollständige Viereck

$$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3,$$

von welchem die drei Diagonalpunkte sind

$$\mathfrak{c}_1 \quad \mathfrak{c}_4 \quad (\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3),$$

so folgt bekanntlich, dass die beiden Punkte

$$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4)$$

die Punkte $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ harmonisch trennen. Nehmen wir aber das vollständige Viereck

$$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3,$$

dessen drei Diagonalpunkte sind

$$\mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{b}_4 \quad (\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3),$$

so folgt, dass die beiden Punkte

$$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4)$$

die Punkte $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ harmonisch trennen; da aber $|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3|$ $|\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3|$ $|\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3|$ sich in einem Punkte schneiden, zu dem es nur *einen* vierten harmonischen rücksichtlich $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ giebt, so müssen sich

$$|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3| \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4| \quad |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4|$$

in einem Punkte schneiden, welcher mit dem Punkte

$$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3)$$

die Punkte $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ harmonisch trennt; wir haben also vier harmonische Punkte auf derselben Geraden. In solcher Weise erhalten wir nun die 12 neuen Punkte:

$$\left\{\begin{array}{lll}
(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4, \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4) = \mathfrak{A}_1; & (\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4) = \mathfrak{B}_1; & (\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4) = \mathfrak{C}_1, \\
(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4, \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4) = \mathfrak{A}_2; & (\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4) = \mathfrak{B}_2; & (\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4) = \mathfrak{C}_2, \\
(\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2, \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4) = \mathfrak{A}_3; & (\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4) = \mathfrak{B}_3; & (\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_1, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4) = \mathfrak{C}_3, \\
(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2) = \mathfrak{A}_4; & (\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3) = \mathfrak{B}_4; & (\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_1) = \mathfrak{C}_4,
\end{array}\right.$$

welche paarweise harmonisch getrennt werden durch diejenigen Punktepaare der ersten Configuration, mit welchen sie auf einer Geraden liegen. Es haben nämlich die sämmtlichen Doppelverhältnisse den Werth -1:

$$(h.) \qquad \left\{\begin{array}{lll}
(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4) & (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4) & (\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4) \\
(\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3) & (\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3) & (\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2) \\
(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4) & (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4) & (\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4) \\
(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3) & (\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3) & (\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2) \\
(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3) & (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3) & (\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2) \\
(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4) & (\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4) & (\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4).
\end{array}\right.$$

Die zwölf neuen Punkte $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i\mathfrak{C}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ bilden nun selbst eine neue Configuration $(12_4, 16_3)$, indem sie zu je dreien auf 16 Geraden liegen. Dies folgt aus dem *Désargues*schen Satze, wenn wir die perspective Lage der folgenden Dreieckspaare berücksichtigen:

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c}\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\\ \mathfrak{b}_3\,\mathfrak{b}_4\,\mathfrak{b}_1\\ \hline |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_4|\end{array} &
\begin{array}{c}\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3\\ \mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_4\,\mathfrak{c}_1\\ \hline |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_4|\end{array} &
\begin{array}{c}\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\\ \mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{a}_1\\ \hline |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_4|\end{array} \\
\begin{array}{c}\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\\ \mathfrak{b}_4\,\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{b}_2\\ \hline |\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_4|\end{array} &
\begin{array}{c}\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3\\ \mathfrak{c}_4\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_2\\ \hline |\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_4|\end{array} &
\begin{array}{c}\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\\ \mathfrak{a}_4\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_2\\ \hline |\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{B}_4|\end{array} \\
\begin{array}{c}\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\\ \mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_4\\ \hline |\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_4|\end{array} &
\begin{array}{c}\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3\\ \mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_4\\ \hline |\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_4|\end{array} &
\begin{array}{c}\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\\ \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_4\\ \hline |\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{A}_4|\end{array} \\
\begin{array}{c}\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_4\\ \mathfrak{c}_4\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_1\\ \hline |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3|\end{array} &
\begin{array}{c}\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_4\\ \mathfrak{a}_4\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_1\\ \hline |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1|\end{array} &
\begin{array}{c}\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_4\\ \mathfrak{b}_4\,\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{b}_1\\ \hline |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2|\end{array} \\
\begin{array}{c}\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_4\\ \mathfrak{b}_4\,\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{b}_1\\ \hline |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2|\end{array} &
\begin{array}{c}\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_4\\ \mathfrak{c}_4\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_1\\ \hline |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3|\end{array} &
\begin{array}{c}\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_4\\ \mathfrak{a}_4\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_1\\ \hline |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1|\end{array} \\
 &
\begin{array}{c}\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3\\ \mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\\ \hline |\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_4|\end{array}. &
\end{array}$$

Die neue Configuration, welche wir die *„conjugirte“* nennen wollen *), lautet also

$$(K.)\quad \begin{cases}
|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_4| & |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3| & |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2| & |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_1| \\
|\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3| & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_4| & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1| & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_2| \\
|\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2| & |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1| & |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_4| & |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_3| \\
|\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1| & |\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2| & |\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3| & |\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_4|.
\end{cases}$$

Die beiden conjugirten Configurationen sind völlig gleichlautend; nur stehen in der ersten die kleinen, in der zweiten die grossen Buchstaben.

§ 3.

Die Configuration als ein Paar von Sechsecken, die einander gleichzeitig ein- und umbeschrieben sind.

Die 12 Punkte der Configuration (*k.*) (S. 271) lassen sich ordnen als die Ecken zweier einfachen Sechsecke, deren jedes dem anderen gleichzeitig ein- und umbeschrieben ist, z. B.

---

*) Herr *J. de Vries* nennt sie die „associirte“; ich ziehe den ersteren Ausdruck vor, indem auch umgekehrt aus der zweiten Configuration in gleicher Weise die erste hervorgeht, wie aus dieser die zweite.

$$\begin{array}{cccccc} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_4 & \mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{c}_4 & \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{b}_2, \end{array}$$

nämlich die Seiten des ersten Sechsecks

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1| \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1| \quad |\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_2| \quad |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4| \quad |\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3| \quad |\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_1|$$

gehen bez. durch die Ecken des zweiten

$$\mathfrak{c}_4 \quad \mathfrak{a}_4 \quad \mathfrak{b}_3 \quad \mathfrak{c}_2 \quad \mathfrak{a}_3 \quad \mathfrak{b}_2,$$

und die Seiten des zweiten Sechsecks

$$|\mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_4| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3| \quad |\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2| \quad |\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_3| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2| \quad |\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4|$$

gehen durch die Ecken des ersten

$$\mathfrak{b}_4 \quad \mathfrak{c}_3 \quad \mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{c}_1 \quad \mathfrak{a}_2 .$$

Solcher Sechseckspaare giebt es 24, nämlich:

$$\begin{array}{lll}
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2 \end{cases} &
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3 \end{cases} &
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4 \end{cases} \\
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3 \end{cases} &
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4 \end{cases} &
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3 \end{cases} \\
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2 \end{cases} &
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3 \end{cases} &
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4 \end{cases} \\
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4 \end{cases} &
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 \end{cases} &
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 \end{cases} \\
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4 \\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1 \end{cases} &
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4 \end{cases} &
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3 \end{cases} \\
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3 \end{cases} &
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4 \\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1 \end{cases} &
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4 \\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1 \end{cases} \\
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4 \\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1 \end{cases} &
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4 \\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1 \end{cases} &
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2 \end{cases} \\
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4 \end{cases} &
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2 \end{cases} &
\begin{cases} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4 \\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1 \end{cases} .
\end{array}$$

Nimmt man ein solches Sechseckspaar heraus, so sind die $2.6 = 12$ Seiten desselben 12 Configurations-Gerade, die vier übrigen enthalten zu je dreien auch sämmtliche Configurations-Punkte, aber jeden nur einmal z. B. die beiden Sechsecke

$$\begin{array}{cccccc} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_4 & \mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{b}_2 \end{array}$$

haben zu ihren 12 Seiten:

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4| \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_4| \quad |\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3| \quad |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2| \quad |\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_3| \quad |\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2|$$

$$|\mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3| \quad |\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_1| \quad |\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1| \quad |\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4\mathfrak{a}_2|,$$

und es bleiben die vier Configurations-Geraden übrig:

$$|\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4| \quad |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3| \quad |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1|;$$

dies gilt in gleicher Weise für sämmtliche Sechseckspaare.

Jedes dieser Sechsecke ist ein *Pascal*sches und zwar von der besonderen Art, dass die erste, dritte und fünfte Ecke auf einer Geraden, die zweite, vierte und sechste Ecke auf einer anderen Geraden liegen; für jedes Sechseckspaar sind diese vier Geraden die vorhin übrig gebliebenen.

Das Gleiche gilt natürlich auch von der Configuration $(K.)$ (S. 275). Diese Figur zweier einander gleichzeitig ein- und umbeschriebener Sechsecke nimmt die zweite Stelle ein in einer Reihe von Configurationen, an deren erster Stelle die *Désargues*sche Figur steht, welche sich bekanntlich in zwei einander gleichzeitig ein- und umbeschriebene Fünfecke auflösen lässt. Die allgemeinen Configurationen dieser Art hat Herr *A. Schönflies* in der Abhandlung: „Ueber die regelmässigen Configurationen n_3" (Math. Ann. Bd. 31, S. 52) untersucht.

§ 4.

Die Configuration als ein Tripel von drei Vierecken in desmischer Lage.

Die 12 Punkte der Configuration $(k.)$ (S. 271) lassen sich so ordnen, dass sie als die Ecken von drei Vierecken erscheinen, von denen jedes mit jedem der anderen beiden in vierfacher Weise perspective Lage hat, und die vier Perspectivitätscentra allemal die vier Ecken des dritten Vierecks sind. Dies geht aus folgender Tabelle hervor, bei welcher die beiden perspectiv liegenden Vierecke mit ihren entsprechenden Ecken unter einander gestellt sind und das jedesmalige Perspectivitäts-Centrum darunter steht:

$$\begin{array}{cccc}
\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 & \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 & \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 & \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 \\
\underline{\mathfrak{c}_4\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_1} & \underline{\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2} & \underline{\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\mathfrak{c}_3} & \underline{\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4} \\
\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_4 \\[1ex]
\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4 & \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4 & \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4 & \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4 \\
\underline{\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1} & \underline{\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2} & \underline{\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_3} & \underline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4} \\
\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{b}_4 \\[1ex]
\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 & \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 & \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 & \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 \\
\underline{\mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_1} & \underline{\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2} & \underline{\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_3} & \underline{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4}\,. \\
\mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{c}_4
\end{array}$$



Eine derartige Lage von drei Vierecken nennen wir nach dem Vorschlage von Herrn *C. Stephanos**) „desmische Lage", wie derselbe sie zuerst für drei Tetraeder angegeben hat.

Das Gleiche gilt natürlich auch für die drei Vierecke der conjugirten Configuration (*K*.) (S. 275):

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{B}_3 & \mathfrak{B}_4 \\ \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{C}_2 & \mathfrak{C}_3 & \mathfrak{C}_4. \end{array}$$

Jedes vollständige Viereck hat sechs Seiten; die 18 Seiten der vorigen Gruppe von drei desmischen Vierecken fallen mit den 18 Seiten dieser conjugirten Gruppe von drei desmischen Vierecken identisch zusammen, wie aus der Tabelle (*h*.) (S. 274) hervorgeht, so dass also die 36 Seiten der sechs vollständigen Vierecke sich in der That nur auf 18 reduciren. Demgemäss reduciren sich auch, da jedes vollständige Viereck drei Diagonalpunkte hat, die 18 Diagonalpunkte nur auf neun, indem sie paarweise zusammenfallen.

Wir bezeichnen diese neun Diagonalpunkte folgendermassen:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4) &\equiv (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4, \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3) = \mathfrak{x}_1\\
(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4) &\equiv (\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4, \mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3) = \mathfrak{y}_1\\
(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3) &\equiv (\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4) = \mathfrak{z}_1\\
(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4) &\equiv (\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3) = \mathfrak{x}_2\\
(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4) &\equiv (\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4, \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3) = \mathfrak{y}_2\\
(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3) &\equiv (\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4) = \mathfrak{z}_2\\
(\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4) &\equiv (\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2) = \mathfrak{x}_3\\
(\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4) &\equiv (\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4, \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2) = \mathfrak{y}_3\\
(\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3) &\equiv (\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4) = \mathfrak{z}_3.
\end{aligned}$$

§ 5.

Beziehungen zwischen den 18 Seiten dreier in desmischer Lage befindlichen Vierecke.

Die 18 Seiten der einen oder der anderen Gruppe der drei in desmischer Lage befindlichen vollständigen Vierecke gruppiren sich in gewisser Weise zu je acht Tangenten eines Kegelschnittes, wie aus folgender Betrachtung hervorgeht:

---

*) *C. Stephanos:* „Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres" (Bulletin des sciences math. 2me Série, Tome III, 1879). Vergl. auch: *H. Schroeter:* „Ueber eine Raumcurve vierter Ordnung und erster Species" (dieses Journal Bd. 93, S. 169).

Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4) = -1 = (\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2) \quad (\S\ 2,\ \text{S. } 274)$$

folgt, dass die vier Verbindungslinien

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3|, \quad |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4|, \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3| \equiv |\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4|, \quad |\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_2| \equiv |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2|$$

vier harmonische Tangenten eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}^{(2)}$ sind, welcher auch die Träger der beiden erzeugenden harmonischen Punktreihen

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4|$$

berührt; also berühren die sechs Geraden

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4| \quad |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3| \quad |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4| \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2| \quad |\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4|$$

einen und denselben Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$.

Jede Gerade, welche die ersten vier harmonischen Tangenten in vier harmonischen Punkten (bei der angegebenen Zuordnung) schneidet, muss daher ebenfalls eine Tangente des Kegelschnittes $\mathfrak{K}^{(2)}$ sein; nun schneidet aber die Gerade $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3|$ jene vier harmonischen Tangenten in den Punkten:

$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3) = \mathfrak{C}_4; \quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4) = \mathfrak{C}_2; \quad \mathfrak{b}_1; \quad \mathfrak{b}_3,$$

und die vier Punkte $\mathfrak{C}_4\mathfrak{C}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3$ sind in der That vier harmonische Punkte, weil $(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4) = -1$ ist (§ 2, S. 274); folglich ist $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3|$ eine Tangente des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$, und in gleicher Weise erhellt, dass auch $|\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4|$ denselben berührt; also berühren die acht Geraden

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4| \quad |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3| \quad |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4| \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2| \quad |\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4| \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3| \quad |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4|$$

sämmtlich einen und denselben Kegelschnitt. Solcher Kegelschnitte giebt es neun, die wir in folgender Weise durch ihre acht Tangenten zusammenstellen:

(*I.*)

1)	$\|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\|$	$\|\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\|$	$\|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\|$	$\|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\|$	$\|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\|$	$\|\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\|$	$\|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\|$	$\|\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4\|$
2)	$\|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\|$	$\|\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\|$	$\|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\|$	$\|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\|$	$\|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\|$	$\|\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4\|$	$\|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3\|$	$\|\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4\|$
3)	$\|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\|$	$\|\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\|$	$\|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\|$	$\|\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4\|$	$\|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\|$	$\|\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4\|$	$\|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3\|$	$\|\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4\|$
4)	$\|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\|$	$\|\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\|$	$\|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\|$	$\|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\|$	$\|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\|$	$\|\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\|$	$\|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4\|$	$\|\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\|$
5)	$\|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\|$	$\|\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\|$	$\|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\|$	$\|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\|$	$\|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\|$	$\|\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4\|$	$\|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\|$	$\|\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\|$
6)	$\|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\|$	$\|\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\|$	$\|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4\|$	$\|\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\|$	$\|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\|$	$\|\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4\|$	$\|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\|$	$\|\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\|$
7)	$\|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\|$	$\|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\|$	$\|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\|$	$\|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\|$	$\|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\|$	$\|\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4\|$	$\|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4\|$	$\|\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\|$
8)	$\|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\|$	$\|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\|$	$\|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\|$	$\|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\|$	$\|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3\|$	$\|\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4\|$	$\|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\|$	$\|\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\|$
9)	$\|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\|$	$\|\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4\|$	$\|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4\|$	$\|\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\|$	$\|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3\|$	$\|\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4\|$	$\|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\|$	$\|\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\|$.



Wir können also den Satz aussprechen:

Die 18 Seiten der drei in desmischer Lage befindlichen vollständigen Vierecke gruppiren sich zu je acht, nämlich immer vier Seiten eines Vierecks mit vier Seiten eines zweiten, als Tangenten eines und desselben Kegelschnitts, und solcher Kegelschnitte giebt es neun.

Wir bemerken noch, dass sich aus den 16 Geraden der Configuration 12 vollständige Vierseite zusammenstellen lassen, deren jedes zu den drei Paar Gegenecken sechs Configurations-Punkte hat; die Paare von Gegenecken dieser 12 vollständigen Vierseite sind folgende:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4; & \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3,\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4; & \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3,\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4; \\
\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4; & \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3,\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3,\ \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4; & \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3,\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4; \\
\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4; & \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4; & \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3,\ \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4; \\
\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4,\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4; & \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4,\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4; & \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4,\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4.
\end{array}$$

Jede Configurations-Gerade tritt daher als Seite in dreien dieser 12 vollständigen Vierseite auf, während die $12.3 = 36$ Diagonalen dieser vollständigen Vierseite paarweise zusammenfallen und die 18 Seiten der drei in desmischer Lage befindlichen Vierecke bilden.

§ 6.

Beziehungen zwischen den neun Diagonalpunkten dreier in desmischer Lage befindlichen Vierecke.

Die in § 4 (S. 278) bezeichneten neun Diagonalpunkte der drei in desmischer Lage befindlichen Vierecke gruppiren sich zu je dreien auf sechs Geraden, wie aus folgender Betrachtung hervorgeht:

Da nach Tabelle (*t.*) (§ 5) die sechs Geraden

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4| \quad |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4| \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3| \quad |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4| \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2|$$

einen Kegelschnitt berühren, also ein *Brianchon*sches Sechsseit bilden:

$$\mathfrak{x}_1 \quad \mathfrak{a}_4 \quad \mathfrak{C}_2 \quad \mathfrak{y}_2 \quad \mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{A}_4,$$

so schneiden sich

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2| \quad |\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_4|$$

in einem Punkte; ebenso berühren

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4| \quad |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| \quad |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4| \quad |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3| \quad |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2|$$

einen Kegelschnitt und bilden also ein *Brianchon*sches Sechsseit:

$$\mathfrak{x}_1 \quad \mathfrak{a}_4 \quad \mathfrak{B}_2 \quad \mathfrak{z}_3 \quad \mathfrak{c}_2 \quad \mathfrak{A}_4,$$

in welchem sich die drei Hauptdiagonalen

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_3| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{c}_2| \quad |\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_4|$$

in einem Punkte schneiden; da aber

$$|\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2| \equiv |\mathfrak{a}_4\mathfrak{c}_2|, \quad |\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_4| \equiv |\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_4|,$$

so liegen

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_3|$$

auf einer Geraden.

In gleicher Weise folgen aus den beiden von je sechs Tangenten umhüllten Kegelschnitten

$$\begin{array}{cccccc} |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2| \\ |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2| \end{array}$$

die *Brianchon*schen Sechsseite:

$$\begin{array}{cccccc} \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{B}_3 & \mathfrak{z}_2 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{A}_4 \\ \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{C}_3 & \mathfrak{y}_3 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{A}_4, \end{array}$$

deren Hauptdiagonalen sich in einem Punkte schneiden:

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_2| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2| \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_4|; \qquad |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_3| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{c}_2| \quad |\mathfrak{C}_3\mathfrak{A}_4|;$$

und da

$$|\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2| \equiv |\mathfrak{a}_4\mathfrak{c}_2|, \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_4| \equiv |\mathfrak{C}_3\mathfrak{A}_4|,$$

so müssen

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_2|$$

auf einer Geraden liegen.

Ferner folgen aus den beiden von je sechs Tangenten umhüllten Kegelschnitten

$$\begin{array}{cccccc} |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3| \\ |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3| \end{array}$$

die *Brianchon*schen Sechsseite:

$$\begin{array}{cccccc} \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{B}_3 & \mathfrak{z}_2 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{C}_4 \\ \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{x}_3 & \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{C}_4, \end{array}$$

deren Hauptdiagonalen sich in einem Punkte schneiden,

$$|\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3| \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_4|; \qquad |\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_3| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{c}_3| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_4|;$$

und da

$$|\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3| \equiv |\mathfrak{a}_4\mathfrak{c}_3|, \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_4| \equiv |\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_4|,$$

so müssen

$$|\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_3\mathfrak{z}_2|$$

auf einer Geraden liegen.

Ebenso folgen aus den beiden von je sechs Tangenten umhüllten Kegelschnitten

$$\begin{array}{cccccc} |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2| & |\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3| \\ |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3| \end{array}$$

die *Brianchon*schen Sechsseite:

$$\begin{array}{cccccc} \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{C}_4 \\ \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{z}_3 & \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{C}_4, \end{array}$$

deren Hauptdiagonalen sich in einem Punkte schneiden,

$$|\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_2| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_4|; \qquad |\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_3| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{c}_3| \quad |\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_4|;$$

und da

$$|\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3| \equiv |\mathfrak{a}_4\mathfrak{c}_3|, \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_4| \equiv |\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_4|,$$

so müssen

$$|\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_3|$$

auf einer Geraden liegen.

Auch aus den beiden von je sechs Tangenten umhüllten Kegelschnitten

$$\begin{array}{cccccc} |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2| & |\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4| \\ |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4| \end{array}$$

folgen die *Brianchon*schen Sechsseite:

$$\begin{array}{cccccc} \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{b}_4 & \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{C}_3 & \mathfrak{y}_3 & \mathfrak{c}_4 & \mathfrak{B}_1, \end{array}$$

deren Hauptdiagonalen sich in einem Punkte schneiden,

$$|\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_2| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4| \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1|; \qquad |\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_3| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{c}_4| \quad |\mathfrak{C}_3\mathfrak{B}_1|,$$

und da

$$|\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4| \equiv |\mathfrak{a}_4\mathfrak{c}_4|, \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1| \equiv |\mathfrak{C}_3\mathfrak{B}_1|,$$

so müssen

$$|\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_3|$$

auf einer Geraden liegen.

Endlich folgen aus den beiden von je sechs Tangenten umhüllten Kegelschnitten

$$\begin{array}{cccccc} |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4| \\ |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4| \end{array}$$



die *Brianchon*schen Sechsseite:

$$\begin{matrix} \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{C}_2 & \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{b}_4 & \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{x}_3 & \mathfrak{c}_4 & \mathfrak{B}_1, \end{matrix}$$

deren Hauptdiagonalen sich in einem Punkte schneiden,

$$|\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_2| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4| \quad |\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_1|; \qquad |\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_3| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{c}_4| \quad |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1|,$$

und da

$$|\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4| \equiv |\mathfrak{a}_4\mathfrak{c}_4|, \quad |\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_1| \equiv |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1|,$$

so müssen

$$|\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{x}_3|$$

auf einer Geraden liegen.

Mehr als diese sechs Geraden, auf denen je drei Diagonalpunkte liegen, treten nicht auf, sondern andere Verbindungen von *Brianchon*schen Sechsseiten führen wieder auf die bereits ermittelten Geraden. Wir können also sagen: ***Die neun Diagonalpunkte liegen zu je dreien auf den sechs Geraden:***

$$\begin{matrix} |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_3| & |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2| \\ |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_3| & |\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_1| \end{matrix}$$

und sind nichts anderes, als die neun Durchschnittspunkte der ersten drei Geraden mit den letzten drei Geraden.

Anmerkung. Zum Nachweis dieser Eigenschaft gelangt man auch auf folgendem Wege, wie Herr Dr. *E. Toeplitz*, dem ich von meiner Untersuchung Mittheilung machte, bemerkt hat:

Aus der Gleichheit der harmonischen Doppelverhältnisse

$$(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) = -1 = (\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3)$$

folgt die Projectivität

$$\mathfrak{x}_1(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) \barwedge \mathfrak{y}_2(\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3)$$

oder

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_1(\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) &\barwedge \mathfrak{y}_2(\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3) \\ &\barwedge \mathfrak{y}_2(\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2); \end{aligned}$$

folglich liegen $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1$ auf einem Kegelschnitt und bilden ein *Pascal*sches Sechseck, bei dem die Schnittpunkte der Gegenseiten

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2, \mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_3); \quad (\mathfrak{y}_2\mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1) \equiv (\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4, \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1) \equiv \mathfrak{C}_1$$

und

$$(\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1) \equiv (\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1) \equiv \mathfrak{A}_4$$



auf einer Geraden liegen, also schneiden sich

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2| \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_3| \quad |\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_4|$$

in einem Punkte.

Aus der Gleichheit der harmonischen Doppelverhältnisse

$$(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2) = -1 = (\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2)$$

folgt die Projectivität

$$\mathfrak{x}_1(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2) \barwedge \mathfrak{z}_3(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2)$$

oder

$$\mathfrak{x}_1(\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2) \barwedge \mathfrak{z}_3(\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2)$$
$$\barwedge \mathfrak{z}_3(\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2);$$

folglich liegen $\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_3\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2$ auf einem Kegelschnitt und bilden ein *Pascal*sches Sechseck, bei dem die Schnittpunkte der Gegenseiten

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_3, \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_3); \quad (\mathfrak{z}_3\mathfrak{c}_1, \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2) \equiv (\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4, \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2) \equiv \mathfrak{B}_1$$

und

$$(\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2, \mathfrak{a}_2\mathfrak{x}_1) \equiv (\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2, \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) \equiv \mathfrak{A}_4$$

auf einer Geraden liegen, also schneiden sich

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_3| \quad |\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_3| \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_4|$$

in einem Punkte.

Da nun

$$|\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_3| \equiv |\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_3|, \quad |\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_4| \equiv |\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_4|,$$

so gehen $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2|$ und $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_3|$ durch denselben Punkt $(\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2, \mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1)$, und da sie ausserdem den Punkt $\mathfrak{x}_1$ gemein haben, so fallen sie identisch zusammen, d. h.

$$\mathfrak{x}_1 \quad \mathfrak{y}_2 \quad \mathfrak{z}_3$$

liegen auf einer Geraden w. z. b. w.

§ 7.

Weitere Beziehungen zwischen den Diagonalpunkten.

Da nach § 5 (S. 279) die acht Geraden

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4| \quad |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3| \quad |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4| \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2| \quad |\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4| \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3| \quad |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4|$$

einen und denselben Kegelschnitt berühren und zwei demselben umschriebene einfache Vierseite

$$\mathfrak{a}_1 \; \mathfrak{a}_2 \; \mathfrak{a}_4 \; \mathfrak{a}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}_1 \; \mathfrak{b}_2 \; \mathfrak{b}_4 \; \mathfrak{b}_3$$

bilden, so sind sowohl die Punkte

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4) = \mathfrak{x}_1 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3) = \mathfrak{z}_1,$$

als auch die Punkte

$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4) = \mathfrak{x}_2 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3) = \mathfrak{z}_2$$

conjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt, d. h. ein solches Paar von Punkten, dass der eine auf der Polare des anderen liegt und umgekehrt. Aus diesen zwei Paaren von conjugirten Punkten folgt aber nach dem bekannten *Hesse*schen Satze ein drittes Paar conjugirter Punkte, nämlich:

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_2, \mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_1) = \mathfrak{y}_3 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2, \mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2),$$

also liegt der Schnittpunkt $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2, \mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2)$ auf der Polare von $\mathfrak{y}_3$. Nun hat aber auch derselbe Kegelschnitt die vier Tangenten

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3| \quad |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4| \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3| \quad |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4|,$$

welche ein ihm umschriebenes Vierseit bilden, dessen drei Diagonalen sind

$$|\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2| \quad |\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4| \equiv |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3| \quad |\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2| \equiv |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4|;$$

folglich ist $|\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2|$ die Polare von $(\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4) = \mathfrak{y}_3$, und der vorige Punkt $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2, \mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2)$ muss auf der Geraden $|\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2|$ liegen, d. h.

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2| \quad |\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2| \quad |\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2|$$

schneiden sich in einem Punkte, welchen wir

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2, \mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2) = \mathfrak{t}_3$$

nennen wollen.

Nunmehr folgt nach dem *Désargues*schen Satze aus der perspectiven Lage der beiden Dreiecke

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{z}_2 \\ \hline \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{z}_1 \end{array}$$

die lineale Lage, d. h.

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_2, \mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_1) = \mathfrak{y}_3, \quad (\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2, \mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_1) = \mathfrak{x}_3, \quad (\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1, \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2)$$

liegen auf gerader Linie, oder

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1| \quad |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2| \quad |\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_3|$$

schneiden sich in einem Punkte. Daher giebt die perspective Lage der beiden Dreiecke

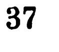
$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{x}_3 \\ \hline \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{y}_3 \end{array}$$

die lineale Lage der drei Punkte:

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2, \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1) = \mathfrak{z}_3, \quad (\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_3, \mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_2) = \mathfrak{z}_1, \quad (\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3, \mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_3)$$

d. h.

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3| \quad |\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_3| \quad |\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_3|$$




schneiden sich in einem Punkte, den wir

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3,\ \mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_3,\ \mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_3) = \mathfrak{t}_2$$

nennen wollen.

Ebenso giebt die perspective Lage der beiden Dreiecke

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{x}_3 \\ \hline \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{y}_3 \end{array}$$

die lineale Lage der Punkte

$$(\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2) = \mathfrak{z}_3, \quad (\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_3,\ \mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_1) = \mathfrak{z}_2, \quad (\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3,\ \mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3);$$

also schneiden sich

$$|\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3| \quad |\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3| \quad |\mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3|$$

in einem Punkte, den wir

$$(\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3,\ \mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3,\ \mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3) = \mathfrak{t}_1$$

nennen wollen.

Aus der perspectiven Lage der beiden Dreiecke

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{x}_3 \\ \hline \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{y}_3 \end{array}$$

folgt aber die lineale Lage der Punkte

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2) = \mathfrak{t}_3, \quad (\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3,\ \mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_3) = \mathfrak{t}_2, \quad (\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3,\ \mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3) = \mathfrak{t}_1;$$

also liegen auch die drei Punkte

$$\mathfrak{t}_1 \quad \mathfrak{t}_2 \quad \mathfrak{t}_3$$

auf gerader Linie.

Weiter ergiebt sich aus der perspectiven Lage der beiden Dreiecke

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{z}_1 \\ \hline \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{z}_2 \end{array}$$

die lineale Lage der Punkte

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2,\ \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1) = \mathfrak{z}_3, \quad (\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2,\ \mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_1) = \mathfrak{x}_3, \quad (\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1,\ \mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_2);$$

also schneiden sich

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1| \quad |\mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_2| \quad |\mathfrak{x}_3\mathfrak{z}_3|$$

in einem Punkte, und aus der perspectiven Lage der beiden Dreiecke

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{z}_2 \\ \hline \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{z}_1 \end{array}$$

folgt die lineale Lage der Punkte

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2,\ \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1) = \mathfrak{z}_3, \quad (\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_2,\ \mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_1) = \mathfrak{y}_3, \quad (\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_2,\ \mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1);$$

also schneiden sich

$$|\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1| \quad |\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_2| \quad |\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_3|$$

in einem Punkte. Bezeichnen wir die drei Punkte:



$$(\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1,\ \mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_2,\ \mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_3) = \mathfrak{x}_4,$$
$$(\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{z}_2\mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{z}_3\mathfrak{x}_3) = \mathfrak{y}_4,$$
$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2,\ \mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_3) = \mathfrak{z}_4,$$

so erkennen wir aus der perspectiven Lage der beiden Dreiecke

$$\frac{\mathfrak{x}_1 \quad \mathfrak{y}_1 \quad \mathfrak{z}_1}{\mathfrak{x}_2 \quad \mathfrak{y}_2 \quad \mathfrak{z}_2}$$

die lineale Lage der Punkte

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2) = \mathfrak{z}_4, \quad (\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1,\ \mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_2) = \mathfrak{x}_4, \quad (\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{z}_2\mathfrak{x}_2) = \mathfrak{y}_4,$$

d. h. auch $\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_4\mathfrak{z}_4$ liegen auf gerader Linie. Wenn wir nun den neun Diagonalpunkten einerseits noch die drei Punkte $\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_4\mathfrak{z}_4$ hinzufügen und andererseits $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3$, so erkennen wir, dass je zwölf Punkte zwei neue Configurationen $(12_4, 16_3)$ bilden, nämlich zu je dreien auf den Geraden liegen:

$$(d.)\quad \left\{\begin{array}{llll}
|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_4| & |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_3| & |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_4\mathfrak{z}_1| \\
|\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_3| & |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_4| & |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_4\mathfrak{z}_2| \\
|\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_4| & |\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_4\mathfrak{z}_3| \\
|\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_3| & |\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_4\mathfrak{z}_4|,
\end{array}\right.$$

$$(d'.)\quad \left\{\begin{array}{llll}
|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{t}_3| & |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_3| & |\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_2\mathfrak{y}_3| & |\mathfrak{x}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{x}_3| \\
|\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_3| & |\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{t}_3| & |\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2\mathfrak{x}_3| & |\mathfrak{y}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{y}_3| \\
|\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_3| & |\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{x}_3| & |\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2\mathfrak{t}_3| & |\mathfrak{z}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{z}_3| \\
|\mathfrak{t}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3| & |\mathfrak{t}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3| & |\mathfrak{t}_1\mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3| & |\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3|,
\end{array}\right.$$

Configurationen derselben Art, wie die ursprüngliche (*k.*) (§ 1), die also auch dieselben Eigenschaften besitzen. Wir können den vorigen Satz auch so aussprechen:

Die neun Diagonalpunkte der drei in desmischer Lage befindlichen Vierecke erscheinen als die Ecken von drei Dreiecken

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1, \quad \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_2, \quad \mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_3,$$

welche paarweise perspectiv liegen; die drei Perspectivitätscentren $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3$ *bilden mit den neun Diagonalpunkten zusammen eine Configuration* $(12_4, 16_3)$.

§ 8.

Beziehungen zwischen den Schnittpunkten der Seiten der drei in desmischer Lage befindlichen Vierecke.

Die Seiten der drei in desmischer Lage befindlichen vollständigen Vierecke

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4, \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$$

schneiden einander nicht nur, wie wir in § 2 gesehen haben, zu je dreien in den 12 Punkten $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i\mathfrak{C}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ der conjugirten Configuration $(K.)$, sondern ausserdem noch in $3.6.4 = 72$ Punkten, welche sich zu je 6 auf 12 neuen Geraden befinden. Dies geht aus folgender Bemerkung hervor:

Nach § 5 berühren die acht Geraden

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \quad \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3 \quad \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4 \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3 \quad \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4$$

einen und denselben Kegelschnitt, und es lassen sich daher aus ihnen in mehrfacher Weise *Brianchon*sche Sechsseite zusammenstellen, für deren jedes sich die drei Hauptdiagonalen in einem Punkte schneiden. Nehmen wir die vier *Brianchon*schen Sechsseite, deren auf einander folgende Seiten sind:

$$\begin{array}{cccccc}
\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3 & \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 & \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4 & \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4 \\
\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3 & \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4 & \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 & \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4 & \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3 \\
\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3 & \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 & \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 & \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4 & \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 \\
\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3 & \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 & \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 & \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4 & \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 ,
\end{array}$$

so sind für das erste derselben die Hauptdiagonalen:

$$\begin{array}{c}
(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3),\ (\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4)\ , \\
(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3),\ (\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4) \equiv \mathfrak{C}_4\mathfrak{C}_3 \equiv \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3\ , \\
\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2\ ;
\end{array}$$

folglich liegen die drei Punkte

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3) \quad (\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4) \quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3,\ \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3)$$

auf einer Geraden.

In gleicher Weise geht aus den drei übrigen Sechsseiten hervor, dass

$$\begin{array}{ccc}
(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3) & (\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4) & (\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4) \\
(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3) & (\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4) & (\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4) \\
(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3) & (\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4) & (\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3)
\end{array}$$

auf je einer Geraden liegen; folglich liegen alle sechs Punkte

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3) \quad (\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4) \quad (\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3) \quad (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4) \quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4,\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4) \quad (\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3,\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2)$$

auf einer und derselben Geraden.

Verfolgt man auf diese Art die sämmtlichen neun Kegelschnitte in § 5, deren jeder von acht Tangenten berührt wird, so ergeben sich 12 Gerade, deren jede sechs von den oben angegebenen 72 Punkten enthält.

Diese 12 Geraden lassen sich in folgender Tabelle zusammenstellen:

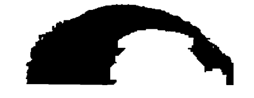
1.	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3)$	$(\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4)$	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4)$	$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3)$	$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4, \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4)$	$(\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2)$
2.	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4)$	$(\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3)$	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3)$	$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4)$	$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2)$	$(\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4)$
3.	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4)$	$(\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3)$	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4)$	$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3)$	$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4)$	$(\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2)$
4.	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3)$	$(\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4)$	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3)$	$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4)$	$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2)$	$(\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4, \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4)$
5.	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)$	$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4, \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4)$	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4, \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4)$	$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2)$	$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4)$	$(\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3)$
6.	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4)$	$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)$	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2)$	$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4)$	$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3)$	$(\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4)$
7.	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4)$	$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3)$	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4)$	$(\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3)$	$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4)$	$(\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3)$
8.	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3)$	$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4)$	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3)$	$(\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4)$	$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3)$	$(\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4)$
9.	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)$	$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4)$	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3, \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4)$	$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2)$	$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4)$	$(\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3)$
10.	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4, \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4)$	$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)$	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2)$	$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4, \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4)$	$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3)$	$(\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4)$
11.	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3)$	$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4)$	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4)$	$(\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3)$	$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4)$	$(\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3)$
12.	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4)$	$(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3)$	$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3)$	$(\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4)$	$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3)$	$(\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4, \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4)$.

Wir können also den Satz aussprechen:

Die 72 übrigen Schnittpunkte der Seiten der drei in desmischer Lage befindlichen Vierecke (ausser den 12 Punkten, in welchen sie zu je dreien zusammenlaufen) liegen zu je sechsen auf 12 Geraden.

Dieselben 72 Punkte vertheilen sich auch zu je sechsen auf 24 Kegelschnitten, indem sie sich zu *Pascal*schen Sechsecken zusammenfügen lassen, deren auf einander folgende Seiten so lauten:

$\vert\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\vert$	$\vert\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\vert$	$\vert\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\vert$	$\vert\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\vert$	$\vert\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4\vert$	$\vert\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\vert$
$\vert\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\vert$	$\vert\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\vert$	$\vert\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\vert$	$\vert\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\vert$	$\vert\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4\vert$	$\vert\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\vert$
$\vert\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\vert$	$\vert\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4\vert$	$\vert\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\vert$	$\vert\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\vert$	$\vert\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\vert$	$\vert\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\vert$
$\vert\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\vert$	$\vert\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4\vert$	$\vert\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\vert$	$\vert\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\vert$	$\vert\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\vert$	$\vert\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\vert$
$\vert\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\vert$	$\vert\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4\vert$	$\vert\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3\vert$	$\vert\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\vert$	$\vert\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\vert$	$\vert\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4\vert$
$\vert\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\vert$	$\vert\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4\vert$	$\vert\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4\vert$	$\vert\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\vert$	$\vert\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\vert$	$\vert\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3\vert$
$\vert\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\vert$	$\vert\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\vert$	$\vert\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3\vert$	$\vert\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\vert$	$\vert\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4\vert$	$\vert\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4\vert$
$\vert\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\vert$	$\vert\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\vert$	$\vert\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4\vert$	$\vert\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\vert$	$\vert\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4\vert$	$\vert\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3\vert$
$\vert\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\vert$	$\vert\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\vert$	$\vert\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\vert$	$\vert\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\vert$	$\vert\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\vert$	$\vert\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\vert$
$\vert\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\vert$	$\vert\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\vert$	$\vert\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\vert$	$\vert\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\vert$	$\vert\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\vert$	$\vert\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\vert$
$\vert\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\vert$	$\vert\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\vert$	$\vert\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\vert$	$\vert\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\vert$	$\vert\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\vert$	$\vert\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\vert$
$\vert\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\vert$	$\vert\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\vert$	$\vert\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\vert$	$\vert\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\vert$	$\vert\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\vert$	$\vert\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\vert$
$\vert\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\vert$	$\vert\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4\vert$	$\vert\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\vert$	$\vert\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\vert$	$\vert\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\vert$	$\vert\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4\vert$
$\vert\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\vert$	$\vert\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4\vert$	$\vert\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4\vert$	$\vert\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\vert$	$\vert\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\vert$	$\vert\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\vert$
$\vert\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\vert$	$\vert\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\vert$	$\vert\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\vert$	$\vert\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\vert$	$\vert\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4\vert$	$\vert\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4\vert$
$\vert\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\vert$	$\vert\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\vert$	$\vert\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4\vert$	$\vert\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\vert$	$\vert\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4\vert$	$\vert\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\vert$



$$\left\{\begin{array}{llllll}
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4| \\
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3| \\
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4| \\
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3| \\
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4| \\
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3| & |\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2| \\
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3| & |\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4| \\
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2|.
\end{array}\right.$$

Die *Pascal*schen Linien dieser 24 Sechsecke sind nichts anderes, als die sechs Geraden:

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_3| \quad |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_1| \quad |\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2| \quad |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_2| \quad |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_3| \quad |\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_1|,$$

welche wir in § 6 gefunden haben (S. 283).

§ 9.

Einige besondere aus der Configuration $(12_4, 16_3)$ hervorgehende Configurationen.

Herr *J. de Vries* macht a. a. O. auf einige besondere Configurationen aufmerksam, welche aus der *Hesse*schen $(12_4, 16_3)$ hervorgehen durch Fortlassung und Hinzufügung gewisser Punkte und Geraden; diese sollen in der von uns gewählten Bezeichnung angeführt werden.

Zunächst bilden zwei solche Sechsecke, wie sie in § 3 betrachtet wurden, von denen jedes dem anderen gleichzeitig ein- und umbeschrieben ist, mit ihren 12 Ecken und ihren 12 Seiten die besondere Configuration $(12_3, 12_3)$, welche dadurch aus der *Hesse*schen hervorgeht, dass aus dieser vier solche Geraden fortgelassen werden, welche keinen Configurations-Punkt gemeinschaftlich haben, aber zu je dreien sämmtliche Configurations-Punkte enthalten, also jeden nur einmal, z. B. werden die vier Geraden fortgelassen

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1| \quad |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2|,$$

so bleibt die Configuration $(12_3, 12_3)$ übrig, welche die 12 Configurations-Punkte in den 12 Geraden enthält:

$$\left\{\begin{array}{llll}
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2| \\
|\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3| \\
|\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4|.
\end{array}\right.$$

Solcher Configurationen sind, wie wir gesehen haben, 24 in der *Hesse*schen enthalten.

Die Vereinigung der *Hesse*schen Configuration mit der zu ihr conjugirten Configuration (§ 2) liefert 24 Punkte $\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_i\mathfrak{c}_i\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i\mathfrak{C}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$,

welche wegen der Identitäten (*h.*) (§ 2) sich zu je vieren auf den 18 Geraden vertheilen:

$$(h.)\quad \left\{\begin{array}{lll}
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4| \\
|\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3| & |\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3| & |\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2| \\
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4| \\
|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2| \\
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2| \\
|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4|,
\end{array}\right.$$

also eine Configuration $(24_3, 18_4)$ bilden, welche von Herrn *J. de Vries* die „harmonische Configuration" genannt wird.

Lassen wir aus dieser harmonischen Configuration die sechs Punkte

$$\mathfrak{a}_4 \quad \mathfrak{b}_4 \quad \mathfrak{c}_4 \quad \mathfrak{A}_4 \quad \mathfrak{B}_4 \quad \mathfrak{C}_4$$

fort, so entsteht eine Configuration:

$$(18_3, 18_3),$$

deren 18 Punkte zu je dreien auf folgenden 18 Geraden vertheilt liegen:

$$\left\{\begin{array}{lll}
|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{A}_1| & |\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{A}_2| & |\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{A}_3| \\
|\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{B}_1| & |\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{B}_2| & |\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{B}_3| \\
|\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{C}_1| & |\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{C}_2| & |\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{C}_3| \\
|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{a}_1| & |\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{a}_2| \\
|\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{b}_3| & |\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{b}_1| & |\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{b}_2| \\
|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{c}_2|.
\end{array}\right.$$

Solcher Configurationen lassen sich 16 aus der harmonischen Configuration ableiten, zu denen wir gelangen, indem wir jedesmal aus der harmonischen Configuration die je sechs Punkte fortlassen:

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_4 & \\
\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_4 & \\
\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_4 & \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2 \\
\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_4 & \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3 \\
\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_4 & \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1 \\
\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_4 & \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1 \\
\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_4 & \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3 \\
\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4\mathfrak{A}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{B}_4 & \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2. \\
\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_4 & \\
\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3\mathfrak{A}_4 &
\end{array}$$



Werden den obigen 18 Geraden der Configuration $(18_3, 18_3)$ noch die sechs Geraden hinzugefügt:

$$\begin{array}{ccc} |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2| \\ |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3| & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1| & |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2|, \end{array}$$

so entsteht eine Configuration:

$$(18_4, 24_3),$$

und werden endlich diesen noch die sechs weiteren Geraden hinzugefügt:

$$\begin{array}{ccc} |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1| \\ |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2| & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3| & |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1|, \end{array}$$

so entsteht eine Configuration:

$$(18_5, 30_3).$$

Wenn wir zu den 12 Punkten der *Hesse*schen Configuration die drei Punkte $\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_4$ der conjugirten Configuration hinzufügen, so erhalten wir 15 Punkte, die sich zu je dreien auf den 20 Geraden vertheilen:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{A}_4| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{B}_4| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1\mathfrak{C}_4| \\ |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{A}_4| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{B}_4| & |\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{C}_4| \\ |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_3\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{A}_4| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{B}_4| & |\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_1\mathfrak{C}_4| \\ & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4| & & & |\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_4|, & \end{array}\right.$$

also eine Configuration $(15_4, 20_3)$ bilden, welche man wohl die *Cayley*sche nennen darf, weil *Cayley* *) sie aus einer Raumfigur abgeleitet hat: Nimmt man sechs beliebige Punkte im Raume unabhängig von einander an, so lassen sich dieselben zu je zweien durch 15 Gerade und zu je dreien durch 20 Ebenen verbinden; eine beliebige Transversalebene wird von den 15 Geraden in 15 Punkten und von den 20 Ebenen in 20 Geraden durchschnitten; die dadurch in der Transversalebene erhaltene Figur ist die Configuration $(15_4, 20_3)$; denn in der Raumfigur enthält jede der 20 Ebenen drei Gerade und durch jede der 15 Geraden gehen vier der 20 Ebenen, also werden in der Transversalebene in der That die Bedingungen der Configuration erfüllt.

Dieser Configuration steht eine zweite zur Seite, die wir erhalten, indem wir in der vorigen nur die kleinen Buchstaben mit den grossen vertauschen. Nehmen wir aber von den 20 Geraden der *Cayley*schen Configuration nur die eine Hälfte heraus, nämlich die Gerade $|\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_4|$ und die

*) *Cayley*: „Sur quelques théorèmes de la géométrie de position". (Dieses Journal Bd. 31, S. 215.)

neun Geraden, welche je einen der Punkte $\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_4$ und zwei von den neun Punkten $\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_i\mathfrak{c}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ der *Hesse*schen Configuration enthalten, die noch zu je dreien auf den sechs Geraden liegen:

$$\begin{array}{ccc} |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2| \\ |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1|, \end{array}$$

so erhalten wir wiederum eine *Hesse*sche Configuration $(12_4, 16_3)$:

$$\left\{\begin{array}{cccc} |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{A}_4| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{b}_3| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{C}_4\,\mathfrak{a}_3| \\ |\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{A}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{C}_4\,\mathfrak{b}_3| \\ |\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_3| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{A}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{C}_4\,\mathfrak{c}_3| \\ |\mathfrak{B}_4\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{B}_4\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3| & |\mathfrak{B}_4\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_4\mathfrak{A}_4|, \end{array}\right.$$

und eine analoge Configuration ergiebt sich aus der conjugirten Configuration. Solcher Configurationen erhalten wir offenbar $2.16 = 32$, zu denen wir gelangen, indem wir an Stelle der abgesonderten Geraden $|\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_4|$ eine der übrigen 16 Configurations-Geraden der *Hesse*schen Configuration oder ihrer conjugirten nehmen.

Wenn wir in der oben angegebenen Configuration $(18_3, 18_3)$ (S. 291) den darin auftretenden Geraden die in ihnen enthaltenen Diagonalpunkte $\mathfrak{x}_i\mathfrak{y}_i\mathfrak{z}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ hinzufügen, also die 18 Geraden haben:

$$\begin{array}{ccc} |\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1| & |\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{x}_2| & |\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{x}_3| \\ |\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{z}_3| \\ |\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{y}_1| & |\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{b}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{y}_2| & |\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{y}_3| \\ |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{c}_3\mathfrak{x}_3| & |\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{c}_1\mathfrak{z}_3| & |\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\,\mathfrak{c}_2\mathfrak{y}_3| \\ |\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\,\mathfrak{a}_3\mathfrak{x}_1| & |\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\,\mathfrak{a}_2\mathfrak{y}_1| \\ |\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{b}_3\mathfrak{x}_2| & |\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{b}_1\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{b}_2\mathfrak{y}_2|, \end{array}$$

so können wir aus ihnen durch Fortlassung der Punkte

$$\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{c}_3 \quad \mathfrak{A}_3 \quad \mathfrak{B}_1 \quad \mathfrak{C}_2$$

und Hinzufügung der drei Geraden

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_3| \quad |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_1| \quad |\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2|$$

eine Configuration $(21_3, 21_3)$ erhalten, die folgende Gestalt hat:

$$\left\{\begin{array}{ccc} |\mathfrak{a}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{x}_2| & |\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\mathfrak{x}_3| \\ |\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{b}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{z}_3| \\ |\mathfrak{a}_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{y}_1| & |\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{b}_1\mathfrak{y}_2| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{y}_3| \\ |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{x}_3| & |\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{c}_1\mathfrak{z}_3| & |\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{c}_2\mathfrak{y}_3| \\ |\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{a}_3\mathfrak{x}_1| & |\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{C}_3\,\mathfrak{a}_2\mathfrak{y}_1| \\ |\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{b}_3\mathfrak{x}_2| & |\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{b}_1\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{C}_3\,\mathfrak{C}_1\mathfrak{y}_2| \\ |\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_3| & |\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{x}_3\,\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2|. \end{array}\right.$$

Diese Configuration erscheint weniger übersichtlich und complicirter, als die unmittelbar aus der Bestimmungsart der Diagonalpunkte (§ 4) hervorgehende Configuration $(21_3, 21_3)$, welche so lautet:

$$\left\{\begin{array}{lll}
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{x}_1| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{x}_2| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{x}_3| \\
|\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{x}_1| & |\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{x}_2| & |\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4\mathfrak{x}_3| \\
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{y}_1| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{y}_2| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3\mathfrak{y}_3| \\
|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\mathfrak{y}_1| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{y}_2| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4\mathfrak{y}_3| \\
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\mathfrak{z}_3| \\
|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{z}_3| \\
|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_3| & |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2|
\end{array}\right.$$

und von den 21 Punkten gebildet wird, die als Ecken und Diagonalpunkte der drei in desmischer Lage befindlichen Vierecke auftreten. An Stelle der drei letzten Configurations-Geraden hätten wir auch die drei Geraden wählen können

$$|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_2| \quad |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_3| \quad |\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_1|,$$

wodurch eine zweite mit dieser nahe zusammenhängende Configuration derselben Art erhalten wird.

§ 10.

Zusammenhang der *Hesse*schen Configuration mit der ebenen Curve dritter Ordnung.

Wenn man aus der *Hesse*schen Configuration $(12_4, 16_3)$ (§ 1) (*k.*) die neun Punkte herausnimmt:

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_3 \\
\mathfrak{c}_4 & \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{b}_3 \\
\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{a}_4,
\end{array}$$

von denen sowohl je drei in einer Horizontalreihe stehende, als auch je drei in einer Verticalreihe stehende auf einer Geraden liegen, so erkennt man, dass sie die neun Durchschnittspunkte von drei Geraden mit drei anderen Geraden sind, also eine Gruppe von neun associirten Punkten bilden, so dass jede Curve dritter Ordnung, welche durch acht derselben geht, auch den neunten (nothwendigen) Punkt der Gruppe enthalten muss. Nimmt man andererseits die neun Punkte:

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{c}_2 \\
\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{a}_4 \\
\mathfrak{c}_4 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_2
\end{array}$$

Die Curven dritter Ordnung $c^{(3)}$ und $C^{(3)}$, welche den beiden conjugirten Configurationen umschrieben werden können, schneiden sich in den neun Diagonalpunkten, welche beiden conjugirten Configurationen gemeinschaftlich sind (§ 4).

Die neun Diagonalpunkte bilden also selbst eine Gruppe von neun associirten Punkten, was auch schon aus ihrer in § 6 erkannten Lage hervorgeht:

$$\begin{matrix} \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{z}_3 \\ \mathfrak{y}_3 & \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{x}_2 \\ \mathfrak{z}_2 & \mathfrak{x}_3 & \mathfrak{y}_1, \end{matrix}$$

indem je drei in einer Horizontalreihe und je drei in einer Verticalreihe stehende Punkte auf gerader Linie liegen, also diese neun Punkte als die Schnittpunkte von drei Geraden mit drei anderen Geraden erscheinen.

Legt man durch die Curve $c^{(3)}$, welche die 12 Configurations-Punkte von $(k.)$ und die neun Diagonalpunkte enthält, die beiden Geraden $|\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1|$ $|\mathfrak{c}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{a}_1|$, so müssen, nach einer bekannten Eigenschaft der Curven dritter Ordnung, die Verbindungslinien $|\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2|$ $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_3|$ und die Tangente in $\mathfrak{a}_1$ der $c^{(3)}$ in drei neuen Punkten begegnen, welche wieder auf einer Geraden liegen; da nun die Gerade $|\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2|$ der $c^{(3)}$ in $\mathfrak{a}_2$ und die Gerade $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_3|$ der $c^{(3)}$ auch in $\mathfrak{a}_2$ begegnet, so muss die Tangente in $\mathfrak{a}_2$ mit der Tangente in $\mathfrak{a}_1$ einen auf der Curve $c^{(3)}$ liegenden Schnittpunkt haben, oder was dasselbe sagt, die beiden Tangenten der Curve in $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ haben denselben Tangentialpunkt auf der $c^{(3)}$. Dieses ist der neunte nothwendige Punkt zu den acht:

$$\begin{matrix} \mathfrak{b}_4 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_2 & \cdot\,, \end{matrix}$$

unter welchen die Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ doppelt auftreten, also die Verbindungslinien $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_2|$ Tangenten der $c^{(3)}$ in $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ sind.

In gleicher Weise folgt aus den Schematen:

$$\begin{matrix} \mathfrak{b}_4 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_3 & \cdot \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \mathfrak{b}_4 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{c}_4 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{a}_4 & \cdot\,, \end{matrix}$$

dass auch die Tangenten in $\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{a}_4$ denselben Tangentialpunkt haben, wie die Tangente in $\mathfrak{a}_1$: also haben die vier Curvenpunkte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ einen und denselben Tangentialpunkt.

Dieser Tangentialpunkt ist leicht zu bestimmen aus den Schematen:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{x}_2 \\ \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{c}_4 & \mathfrak{x}_3 \\ \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_2 & \cdot \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{y}_2 \\ \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{y}_3 \\ \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_2 & \cdot \end{array},$$

er muss also sowohl auf $|\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3|$ als auch auf $|\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3|$ liegen und ist daher der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3, \mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3) = \mathfrak{t}_1 \quad (\S\ 7,\ \text{S. } 286);$$

wir schliessen also:

Die vier Punkte** $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ **sind die vier Berührungspunkte der Tangenten aus dem auf der Curve liegenden Punkte** $\mathfrak{t}_1$ **an dieselbe.

Ebenso zeigt sich, dass $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4$ die vier Berührungspunkte der Tangenten aus dem auf der Curve liegenden Punkte $\mathfrak{t}_2$ an dieselbe und dass $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$ die vier Berührungspunkte aus dem auf der Curve liegenden Punkte $\mathfrak{t}_3$ an dieselbe sind.

Wir haben also jetzt 24 Punkte auf der $c^{(3)}$, nämlich die 12 Configurations-Punkte $\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_i\mathfrak{c}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, die neun Diagonalpunkte $\mathfrak{x}_i\mathfrak{y}_i\mathfrak{z}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ und die drei Punkte $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3$, die gemeinsamen Tangentialpunkte der je vier Punkte $\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_i\mathfrak{c}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Ebenso liegen auf der $C^{(3)}$ 24 Punkte, nämlich die 12 Configurations-Punkte der conjugirten Configuration $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i\mathfrak{C}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, die neun Diagonalpunkte $\mathfrak{x}_i\mathfrak{y}_i\mathfrak{z}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ und die drei Punkte $\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_4\mathfrak{z}_4$, die gemeinsamen Tangentialpunkte der je vier Punkte $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i\mathfrak{C}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Hierdurch ist der Zusammenhang der *Hesse*schen Configuration $(12_4, 16_3)$ und der zu ihr conjugirten Configuration, wie sie aus unseren elementaren Constructionen (§ 1 und 2) hervorgingen, mit der ebenen Curve dritter Ordnung vollkommen klargelegt.

§ 11.

Nachweis der Möglichkeit zweier verschiedenen Configurationen $(12_4, 16_3)$.

Herr *J. de Vries* sagt in seiner Abhandlung (a. a. O S. 67): „Es giebt nur zwei Configurationen $(12_4, 16_3)$, deren Punkte drei Quadrupel bilden, in welchen jeder Punkt von den übrigen getrennt ist“; da er die Untersuchung, welche zu diesem Resultat führt, nicht mittheilt, so sei es gestattet, einen Nachweis desselben hier beizufügen:

Soll eine Configuration $(12_4, 16_3)$ gebildet werden, so müssen durch einen Punkt $\mathfrak{a}_1$ derselben vier Gerade gehen, deren jede noch zwei weitere

Configurations-Punkte enthält, was neun Punkte giebt; also bleiben noch drei Configurations-Punkte (Restpunkte) übrig, die nicht mit $\mathfrak{a}_1$ durch Configurations-Gerade verbunden sind. Nennen wir diese $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ und fügen die Bedingung hinzu, dass auch diese unter einander nicht durch Configurations-Gerade verbunden sein sollen, also dass für $\mathfrak{a}_2$, als Ausgangspunkt genommen, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ als Restpunkte bleiben u. s. f., dann bilden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ ein Quadrupel von Punkten, die nicht mit einander durch Configurations-Gerade verbunden (d. h. von einander getrennt) sind.

Nehmen wir nun einen weiteren Punkt $\mathfrak{b}_1$ der Configuration, so können unter den zu ihm gehörigen Restpunkten $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ nicht vorkommen, denn $\mathfrak{b}_1$ muss einer der acht Punkte sein, die mit $\mathfrak{a}_1$ verbunden sind. Nennen wir die zu $\mathfrak{b}_1$ gehörigen Restpunkte $\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4$ und fügen die Bedingung hinzu, dass jeder von diesen vier Punkten $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4$ die drei übrigen zu Restpunkten habe, so bilden diese ein zweites Quadrupel, wie das erste, und es muss jeder Punkt des zweiten mit jedem Punkt des ersten durch Configurations-Gerade verbunden sein; dadurch erhalten wir die 16 Configurations-Geraden $|\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_k|$, auf denen die vier letzten Configurations-Punkte, welche wir $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$ nennen wollen, so vertheilt liegen müssen, dass jede der 16 Geraden $|\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_k|$ nur noch einen der Punkte $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$ als dritten Configurations-Punkt enthält, welche selbst unter einander nicht verbunden sein können, weil wir sonst mehr als 16 Configurations-Gerade erhielten. Diese vier Punkte $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$ bilden das dritte Quadrupel von Configurations-Punkten.

Schreiben wir nun die 16 Configurations-Geraden hin und lassen den dritten Punkt auf jeder derselben noch frei:

$$\begin{array}{cccc}
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\cdot| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\cdot| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\cdot| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\cdot| \\
|\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\cdot| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\cdot| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\cdot| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\cdot| \\
|\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\cdot| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\cdot| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\cdot| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\cdot| \\
|\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1\cdot| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2\cdot| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3\cdot| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\cdot|,
\end{array}$$

so müssen in jeder Horizontalreihe als dritte Punkte $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$ in irgend einer Anordnung stehen, weil zwei gleiche $\mathfrak{c}_i$ nicht in derselben Horizontalreihe stehen können, ohne dass zwei Configurations-Gerade identisch werden; dasselbe gilt von jeder Verticalreihe; wir setzen in die erste Horizontalreihe, um in Uebereinstimmung mit der uns bereits bekannten Configuration $(12_4, 16_3)$ zu bleiben, die Punkte $\mathfrak{c}_i$ in der Anordnung als dritte Punkte

$$\mathfrak{c}_4 \quad \mathfrak{c}_3 \quad \mathfrak{c}_2 \quad \mathfrak{c}_1,$$

wodurch keine Beschränkung eingeführt wird; und wir dürfen auch in der ersten Verticalreihe als dritte Punkte die c_i in derselben Anordnung

$$c_4 \quad c_3 \quad c_2 \quad c_1$$

einsetzen, ohne eine Beschränkung einzuführen, weil die Punkte $a_2 a_3 a_4$ unter einander vertauscht werden können, ohne dass das obige Schema sich ändert; wir erhalten also unter allen Umständen folgendes Schema:

$$\begin{array}{cccc}
|a_1 b_1 c_4| & |a_1 b_2 c_3| & |a_1 b_3 c_2| & |a_1 b_4 c_1| \\
|a_2 b_1 c_3| & |a_2 b_2 \cdot| & |a_2 b_3 \cdot| & |a_2 b_4 \cdot| \\
|a_3 b_1 c_2| & |a_3 b_2 \cdot| & |a_3 b_3 \cdot| & |a_3 b_4 \cdot| \\
|a_4 b_1 c_1| & |a_4 b_2 \cdot| & |a_4 b_3 \cdot| & |a_4 b_4 \cdot|.
\end{array}$$

Jetzt sind noch neun Stellen mit den c_i auszufüllen. An die erste leere Stelle kann nur entweder c_4 oder c_1 oder c_2 treten, ohne dass zwei Configurations-Gerade identisch werden; setzen wir zuerst c_4 in die fehlende zweite Stelle der zweiten Horizontalreihe, so muss in derselben an dritter Stelle c_1 und an vierter Stelle c_2 stehen, ebenso in der zweiten Verticalreihe an dritter Stelle c_1 und an vierter Stelle c_2 stehen; dagegen können in den noch übrig bleibenden vier leeren Stellen die Punkte c_4 und c_3 in zweifacher Weise vertheilt werden, und wir erhalten die beiden möglichen Configurationen:

$$(1.)\quad \left\{\begin{array}{cccc}
|a_1 b_1 c_4| & |a_1 b_2 c_3| & |a_1 b_3 c_2| & |a_1 b_4 c_1| \\
|a_2 b_1 c_3| & |a_2 b_2 c_4| & |a_2 b_3 c_1| & |a_2 b_4 c_2| \\
|a_3 b_1 c_2| & |a_3 b_2 c_1| & |a_3 b_3 c_4| & |a_3 b_4 c_3| \\
|a_4 b_1 c_1| & |a_4 b_2 c_2| & |a_4 b_3 c_3| & |a_4 b_4 c_4|,
\end{array}\right.$$

$$(2.)\quad \left\{\begin{array}{cccc}
|a_1 b_1 c_4| & |a_1 b_2 c_3| & |a_1 b_3 c_2| & |a_1 b_4 c_1| \\
|a_2 b_1 c_3| & |a_2 b_2 c_4| & |a_2 b_3 c_1| & |a_2 b_4 c_2| \\
|a_3 b_1 c_2| & |a_3 b_2 c_1| & |a_3 b_3 c_3| & |a_3 b_4 c_4| \\
|a_4 b_1 c_1| & |a_4 b_2 c_2| & |a_4 b_3 c_4| & |a_4 b_4 c_3|.
\end{array}\right.$$

Setzen wir zweitens in dem vorigen noch unausgefüllten Schema an die erste leere Stelle c_1, so muss in der zweiten Horizontalreihe an dritter Stelle c_4 und an vierter Stelle c_2 stehen; in der zweiten Verticalreihe muss an dritter Stelle c_4 an vierter Stelle c_2 stehen; an dritter Stelle der dritten Horizontal- oder Verticalreihe könnte nur c_1 oder c_3 stehen; c_3 kann aber nicht stehen, weil sonst c_1 an die vierte Stelle der dritten Horizontal-

reihe käme, was nicht angängig ist, ohne zwei Configurations-Gerade identisch zu machen; also ist nur die einzige Möglichkeit vorhanden, an die dritte Stelle der dritten Horizontal- (oder Vertical-) Reihe das Element $\mathfrak{c}_1$ zu setzen, wodurch nun die übrigen leeren Stellen unzweideutig bestimmt werden, und wir erhalten folgende Configuration:

$$(3.)\quad \begin{cases} |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1| \\ |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2| \\ |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3| \\ |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4|. \end{cases}$$

Setzen wir endlich in dem obigen noch unausgefüllten Schema an die erste leere Stelle $\mathfrak{c}_2$, so muss in der zweiten Horizontalreihe an dritter Stelle $\mathfrak{c}_1$ und an vierter Stelle $\mathfrak{c}_4$ stehen, weil die Umstellung dieser beiden Elemente zu einer Identität zweier Configurations-Geraden führen würde; in der zweiten Verticalreihe kann an dritter Stelle nicht $\mathfrak{c}_2$ $\mathfrak{c}_3$ oder $\mathfrak{c}_4$ stehen, weil sonst offenbar Identitäten hervorgingen, vielmehr muss $\mathfrak{c}_1$ stehen, also an vierter Stelle $\mathfrak{c}_4$. In der dritten Horizontalreihe muss aus gleichen Gründen an dritter Stelle $\mathfrak{c}_4$ stehen, und die übrigen leeren Stellen sind dann unzweideutig bestimmt, so dass nur die einzige Möglichkeit der Configuration hervorgeht:

$$(4.)\quad \begin{cases} |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1| \\ |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4| \\ |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3| \\ |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2|. \end{cases}$$

Im Ganzen stellen sich also zunächst vier Configurationen $(12_4, 16_3)$ als möglich heraus, die wir mit (1.) (2.) (3.) (4.) bezeichnet haben. Es zeigt sich aber, dass die drei Configurationen (2.) (3.) (4.) identisch sind und durch eine Vertauschung ihrer Elemente in einander übergeführt werden können, so dass in der That nur zwei wesentlich von einander verschiedene Configurationen $(12_4, 16_3)$ übrig bleiben.

Wenn wir nämlich in der Configuration (3.) an Stelle der Elemente:

$$\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{a}_2 \quad \mathfrak{a}_3 \quad \mathfrak{a}_4 \qquad \mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{b}_3 \quad \mathfrak{b}_4 \qquad \mathfrak{c}_1 \quad \mathfrak{c}_2 \quad \mathfrak{c}_3 \quad \mathfrak{c}_4$$

bez.

$$\mathfrak{a}'_1 \quad \mathfrak{a}'_4 \quad \mathfrak{a}'_3 \quad \mathfrak{a}'_2 \qquad \mathfrak{b}'_3 \quad \mathfrak{b}'_1 \quad \mathfrak{b}'_2 \quad \mathfrak{b}'_4 \qquad \mathfrak{c}'_1 \quad \mathfrak{c}'_3 \quad \mathfrak{c}'_4 \quad \mathfrak{c}'_2$$

setzen und in der dadurch erhaltenen Configuration die oberen Accente fort-

streichen, so erhalten wir nach gehöriger Umstellung der Configurations-Geraden genau die Configuration (2.), wodurch die Identität derselben mit (3.) nachgewiesen ist.

Wenn wir andererseits in der Configuration (4.) an Stelle der Elemente

$$\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{a}_2 \quad \mathfrak{a}_3 \quad \mathfrak{a}_4 \qquad \mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{b}_3 \quad \mathfrak{b}_4 \qquad \mathfrak{c}_1 \quad \mathfrak{c}_2 \quad \mathfrak{c}_3 \quad \mathfrak{c}_4$$

bez.

$$\mathfrak{a}_1' \quad \mathfrak{a}_4' \quad \mathfrak{a}_2' \quad \mathfrak{a}_3' \qquad \mathfrak{b}_3' \quad \mathfrak{b}_1' \quad \mathfrak{b}_4' \quad \mathfrak{b}_2' \qquad \mathfrak{c}_3' \quad \mathfrak{c}_1' \quad \mathfrak{c}_4' \quad \mathfrak{c}_2'$$

setzen und in der dadurch erhaltenen Configuration die oberen Accente fortstreichen, so erhalten wir nach gehöriger Umstellung der Configurations-Geraden genau die Configuration (2.), wodurch die Identität derselben mit (4.) nachgewiesen ist.

Wir erhalten also in der That nur zwei wesentlich von einander verschiedene Configurationen $(12_4, 16_3)$ unter den vorgeschriebenen Bedingungen; die erste derselben (1.), welche Herr *J. de Vries* $(12_4, 16_3)A$ nennt, ist die *Hesse*sche $(k.)$ (§ 1); die zweite (2.), welche Herr *J. de Vries* $(12_4, 16_3)B$ nennt, wollen wir unter Vertauschung der Elemente $\mathfrak{c}_3$ und $\mathfrak{c}_4$ so schreiben:

$$(k'.) \qquad \begin{cases} |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1| \\ |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2| \\ |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3| \\ |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4| \end{cases}$$

und $(k'.)$ nennen. Sie hat mit der Configuration $(k.)$ 12 Configurations-Gerade gemeinschaftlich, nur die vier übrigen sind verschieden in den beiden Configurationen. Auch diese zweite Configuration $(12_4, 16_3)$ lässt sich auf elementare Weise folgendermassen construiren.

§ 12.

Construction der zweiten Configuration $(12_4, 16_3)B$.

Wir gehen von zwei perspectiv liegenden Dreiecken aus:

$$\frac{\begin{matrix}\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3\end{matrix}}{\mathfrak{a}_4},$$

bei denen sich die Verbindungslinien entsprechender Ecken $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1|$ $|\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2|$ $|\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3|$ in einem Punkte $\mathfrak{a}_4$ schneiden, und bestimmen die Schnittpunkte

$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3, \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2) = \mathfrak{a}_1, \quad (\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3, \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1) = \mathfrak{a}_2, \quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2, \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1) = \mathfrak{a}_3;$$

dann folgt, dass das von den sechs Punkten

$$\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{c}_1 \quad \mathfrak{a}_2 \quad \mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{c}_2$$

gebildete einfache Sechseck ein *Pascal*sches sein muss, d. h. seine sechs Ecken auf einem Kegelschnitt liegen, weil die drei Schnittpunkte der Gegenseiten

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{c}_3, \quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1, \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2) = \mathfrak{a}_4, \quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{b}_3$$

auf einer Geraden $|\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_4|$ liegen.

Nehmen wir nun das *Pascal*sche Sechseck

$$\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{c}_2 \quad \mathfrak{a}_2 \quad \mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{c}_1,$$

so sind die Schnittpunkte der Gegenseiten

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{c}_3, \quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2, \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1) = \mathfrak{a}_3, \quad (\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2, \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1);$$

folglich schneiden sich

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1| \quad |\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_3|$$

in einem Punkte, den wir

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1, \mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_3) = \mathfrak{b}_4$$

nennen wollen, und von dem wir sehen, dass

$$|\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2|$$

auf einer Geraden liegen.

Nehmen wir zweitens das *Pascal*sche Sechseck

$$\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{c}_1 \quad \mathfrak{a}_2 \quad \mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{c}_2,$$

so sind die Schnittpunkte der Gegenseiten

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1), \quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2, \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1) = \mathfrak{a}_3, \quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_2) = \mathfrak{b}_3;$$

folglich schneiden sich

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2| \quad |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3|$$

in einem Punkte, den wir

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3) = \mathfrak{c}_4$$

nennen wollen, und von dem wir sehen, dass

$$|\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4|$$

auf einer Geraden liegen.

Nehmen wir endlich das *Pascal*sche Sechseck

$$\mathfrak{a}_2 \quad \mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{c}_1 \quad \mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{c}_2,$$

so sind die Schnittpunkte der Gegenseiten desselben

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{c}_4, \quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1, \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2) = \mathfrak{a}_4, \quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1, \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{b}_4,$$

welche in einer Geraden

$$|\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4|$$

liegen müssen.

Wir sehen hieraus, dass die 12 Punkte $\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_i\mathfrak{c}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ zu je dreien auf 16 Geraden liegen, welche die Configuration $(k'.)$ oder $(12_4, 16_3)B$ bilden:

$$(k'.) \qquad \begin{cases} |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1| \\ |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2| \\ |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3| \\ |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4|. \end{cases}$$

Die Punkte der Configuration gruppiren sich auch hier (wie in § 4) zu drei Vierecken in desmischer Lage, allein mit etwas anderer Anordnung; stellen wir je zwei perspectiv liegende Vierecke mit ihren entsprechenden Ecken unter einander und das jedesmalige Perspectivitäts-Centrum darunter, so erhalten wir folgende Tabelle:

$$\begin{array}{cccc}
\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 & \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 & \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 & \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 \\
\underline{\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_1} & \underline{\mathfrak{c}_4\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2} & \underline{\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\mathfrak{c}_3} & \underline{\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4} \\
\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_4 \\
\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4 & \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4 & \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4 & \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4 \\
\underline{\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2} & \underline{\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1} & \underline{\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_3} & \underline{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4} \\
\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{b}_4 \\
\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 & \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 & \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 & \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 \\
\underline{\mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_1} & \underline{\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2} & \underline{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_3} & \underline{\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4}\,. \\
\mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{c}_4
\end{array}$$

Andererseits ersehen wir aus der Configuration $(k'.)$, dass sich die 16 Configurations-Geraden nur zu vier vollständigen Vierseiten gruppiren, deren jedes zu den drei Paar Gegenecken sechs Configurations-Punkte hat. Die Paare von Gegenecken dieser vier vollständigen Vierseite sind:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, & \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2, & \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4; \\
\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2, & \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2, & \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4; \\
\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2, & \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, & \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4; \\
\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, & \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4, & \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4.
\end{array}$$



Jedes dieser vier vollständigen Vierseite enthält sechs Configurations-Punkte als Ecken; nehmen wir die sechs übrigen Configurations-Punkte, so liegen dieselben allemal auf einem Kegelschnitt; wir erhalten also vier Kegelschnitte, auf deren jedem sechs Configurations-Punkte liegen, nämlich

$$\begin{array}{llllll l}
\mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{b}_4 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \text{liegen auf einem Kegelschnitt,}\\
\mathfrak{b}_3 & \mathfrak{b}_4 & \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{c}_4 & \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \text{- - - - -}\\
\mathfrak{c}_3 & \mathfrak{c}_4 & \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \text{- - - - -}\\
\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \text{- - - - - ,}
\end{array}$$

wie unmittelbar aus dem *Pascal*schen Satze zu erkennen ist.

Ferner ergeben sich drei Kegelschnitte, welche von je acht Geraden berührt werden:

$$\begin{array}{llllllllll}
1) & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3|, \\
2) & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3|, \\
3) & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3|.
\end{array}$$

Hieraus folgt durch mehrfache Anwendung des *Brianchon*schen Satzes, wenn man die sechs Diagonalpunkte bezeichnet:

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4) = \mathfrak{x}_1, \quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4) = \mathfrak{y}_1, \quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4) = \mathfrak{z}_1,$$
$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3) = \mathfrak{x}_2, \quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3) = \mathfrak{y}_2, \quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3) = \mathfrak{z}_2,$$

dass sich die je drei Verbindungslinien

$$\begin{array}{llll l}
|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2| & |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2| & \text{in einem Punkte schneiden} & \mathfrak{z}_4,\\
|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1| & |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2| & |\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4| & \text{- - - -} & \mathfrak{z}_3,\\
|\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2| & \text{- - - -} & \mathfrak{x}_3,\\
|\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4| & \text{- - - -} & \mathfrak{x}_4,\\
|\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_2| & |\mathfrak{z}_2\mathfrak{x}_1| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2| & \text{- - - -} & \mathfrak{y}_3,\\
|\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1| & |\mathfrak{z}_2\mathfrak{x}_2| & |\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4| & \text{- - - -} & \mathfrak{y}_4;
\end{array}$$

von diesen sechs neuen Punkten zeigt sich, dass sie zu je dreien auf vier Geraden liegen

$$|\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_4| \quad |\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_4\mathfrak{z}_3| \quad |\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_3| \quad |\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_4\mathfrak{z}_4|,$$

so dass die 12 Punkte $\mathfrak{x}_i\mathfrak{y}_i\mathfrak{z}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ sich zu einer neuen Configuration $(12_4, 16_3)B$ zusammenfügen, die so lautet:

$$\left\{\begin{array}{llll}
|\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_3| & |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_4| & |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_4\mathfrak{z}_1|,\\
|\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_4| & |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_3| & |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_4\mathfrak{z}_2|,\\
|\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_4| & |\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_4\mathfrak{z}_3|,\\
|\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_3| & |\mathfrak{x}_4\mathfrak{y}_4\mathfrak{z}_4|;
\end{array}\right.$$

zugleich liegen je sechs Punkte

$\mathfrak{x}_1$ $\mathfrak{x}_2$ $\mathfrak{y}_1$ $\mathfrak{y}_2$ $\mathfrak{z}_1$ $\mathfrak{z}_2$ auf einem Kegelschnitt,

$\mathfrak{x}_1$ $\mathfrak{x}_2$ $\mathfrak{y}_3$ $\mathfrak{y}_4$ $\mathfrak{z}_3$ $\mathfrak{z}_4$ - - - - ,

$\mathfrak{x}_3$ $\mathfrak{x}_4$ $\mathfrak{y}_1$ $\mathfrak{y}_2$ $\mathfrak{z}_3$ $\mathfrak{z}_4$ - - - - ,

$\mathfrak{x}_3$ $\mathfrak{x}_4$ $\mathfrak{y}_3$ $\mathfrak{y}_4$ $\mathfrak{z}_1$ $\mathfrak{z}_2$ - - - - ,

u. s. w.

Es würde zu weit führen, diese interessante Figur in gleicher Ausführlichkeit, wie die *Hesse*sche Configuration zu untersuchen; wir begnügen uns daher damit, nur noch den Zusammenhang derselben mit der Curve dritter Ordnung nachzuweisen.

§ 13.

Zusammenhang der Configuration $(12_4, 16_3)B$ mit der ebenen Curve dritter Ordnung.

Wenn man aus der Configuration $(12_4, 16_3)B$ die neun Punkte

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_4 \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{b}_3 \end{matrix}$$

herausnimmt, von denen je drei in einer Horizontalreihe und je drei in einer Verticalreihe stehende auf gerader Linie liegen, so erkennt man, dass sie eine Gruppe von neun associirten Punkten bilden, d. h. jede Curve dritter Ordnung, welche durch acht derselben geht, auch den neunten (nothwendigen) Punkt der Gruppe enthalten muss.

Nimmt man andererseits die neun Punkte

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_4 & \mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{b}_4 \end{matrix}$$

heraus, so erhält man eine zweite Gruppe von neun associirten Punkten. Diese beiden Gruppen haben aber sieben Punkte gemeinschaftlich:

$$\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{a}_3 \quad \mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{b}_3 \quad \mathfrak{c}_2 \quad \mathfrak{c}_3 \quad \mathfrak{c}_4;$$

fügt man denselben die Punkte $\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{a}_2$ hinzu, so wird durch diese neun Punkte nur eine einzige Curve dritter Ordnung $c_1^{(3)}$ bestimmt, welche wegen der ersten Gruppe den neunten nothwendigen Punkt $\mathfrak{a}_4$ und wegen der zweiten Gruppe den neunten nothwendigen Punkt $\mathfrak{b}_4$ enthalten muss. Es



liegen daher die elf Punkte

$$\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{a}_2 \quad \mathfrak{a}_3 \quad \mathfrak{a}_4 \quad \mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{b}_3 \quad \mathfrak{b}_4 \quad \mathfrak{c}_2 \quad \mathfrak{c}_3 \quad \mathfrak{c}_4$$

auf einer und derselben $c_1^{(3)}$; dass auch der zwölfte Punkt $\mathfrak{c}_1$ auf ihr liegt, erkennen wir aus der Gruppe von neun associirten Punkten

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{c}_4 \\ \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{b}_1. \end{matrix}$$

Wir schliessen also:

Die 12 Punkte der Configuration $(12_4, 16_3)B$ *liegen auf einer Curve dritter Ordnung* $c_1^{(3)}$.

Legt man durch diese $c_1^{(3)}$ die beiden Geraden $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{c}_4\mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_1|$, so müssen nach einer bekannten Eigenschaft der Curven dritter Ordnung die Verbindungslinien $|\mathfrak{c}_4\mathfrak{b}_1|$, $|\mathfrak{c}_3\mathfrak{b}_2|$ und die Tangente in $\mathfrak{a}_1$ der $c_1^{(3)}$ in drei neuen Punkten begegnen, welche wieder auf einer Geraden liegen; da nun die Gerade $|\mathfrak{c}_4\mathfrak{b}_1|$ der $c_1^{(3)}$ in $\mathfrak{a}_2$, und die Gerade $|\mathfrak{c}_3\mathfrak{b}_2|$ der $c_1^{(3)}$ auch in $\mathfrak{a}_2$ begegnet, so muss die Tangente in $\mathfrak{a}_2$ mit der Tangente in $\mathfrak{a}_1$ einen auf der $c_1^{(3)}$ liegenden Schnittpunkt haben, d. h. die beiden Tangenten der Curve in $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ haben denselben Tangentialpunkt auf der $c_1^{(3)}$. Dieses ist der neunte nothwendige Punkt zu den acht:

$$\begin{matrix} \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{c}_4 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_2 & \cdot, \end{matrix}$$

unter welchen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ doppelt auftreten, also die Verbindungslinien $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_2|$ Tangenten der $c_1^{(3)}$ in den Punkten $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ sind.

In gleicher Weise ergiebt sich aus dem Schema

$$\begin{matrix} \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{c}_4 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{b}_4 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{a}_4 & \cdot, \end{matrix}$$

dass auch die Tangenten in $\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{a}_4$ denselben Tangentialpunkt haben.

Dagegen zeigt uns das Schema

$$\begin{matrix} \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{c}_4 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_4 & \cdot, \end{matrix}$$

dass der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{a}_1$ mit dem dritten Schnittpunkt von $|\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4|$ und der $c_1^{(3)}$ zusammenfällt, und ebenso zeigt das Schema

$$\begin{matrix} \mathfrak{b}_4 & \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \cdot \end{matrix},$$

dass der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{a}_3$ mit dem dritten Schnittpunkt von $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2|$ und der $c_1^{(3)}$ zusammenfällt. Wir haben also das Resultat:

Die vier Punkte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ ***liegen derartig auf der Curve*** $c_1^{(3)}$, ***dass*** $\mathfrak{a}_1$ ***und*** $\mathfrak{a}_2$ ***denselben Tangentialpunkt haben, welcher der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie*** $|\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4|$ ***und der Curve*** $c_1^{(3)}$ ***ist, und dass*** $\mathfrak{a}_3$ ***und*** $\mathfrak{a}_4$ ***denselben Tangentialpunkt haben, welcher der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie*** $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2|$ ***und der Curve*** $c_1^{(3)}$ ***ist.***

In gleicher Weise zeigt sich, wenn wir bezeichnen durch

$\mathfrak{a}_{12}$ den dritten Schnittpunkt von $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2|$ mit der $c_1^{(3)}$
$\mathfrak{a}_{34}$ - - - - $|\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4|$ - - -
$\mathfrak{b}_{12}$ - - - - $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2|$ - - -
$\mathfrak{b}_{34}$ - - - - $|\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4|$ - - -
$\mathfrak{c}_{12}$ - - - - $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2|$ - - -
$\mathfrak{c}_{34}$ - - - - $|\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4|$ - - - ,

dass $\mathfrak{a}_{34}$ der gemeinschaftliche Tangentialpunkt für $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$
- $\mathfrak{a}_{12}$ - - - - $\mathfrak{a}_3$ - $\mathfrak{a}_4$
- $\mathfrak{b}_{34}$ - - - - $\mathfrak{b}_1$ - $\mathfrak{b}_2$
- $\mathfrak{b}_{12}$ - - - - $\mathfrak{b}_3$ - $\mathfrak{b}_4$
- $\mathfrak{c}_{34}$ - - - - $\mathfrak{c}_1$ - $\mathfrak{c}_2$
- $\mathfrak{c}_{12}$ - - - - $\mathfrak{c}_3$ - $\mathfrak{c}_4$

ist.

Da $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ denselben Tangentialpunkt haben, so sind sie ein Paar conjugirter Punkte der $c_1^{(3)}$ für eines der drei Systeme derselben. Da aber ein Paar conjugirter Punkte eines Systems von einem beliebigen Curvenpunkte auf die Curve projicirt immer wieder ein neues Paar conjugirter Punkte desselben Systems liefert, so sehen wir aus der Tabelle der drei in desmischer Lage befindlichen Vierecke (S. 303), dass auf der $c_1^{(3)}$ folgende sechs Paare conjugirter Punkte einem und demselben Systeme angehören:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{a}_1 \text{ und } \mathfrak{a}_2, & & \mathfrak{a}_3 \text{ und } \mathfrak{a}_4 \\ \mathfrak{b}_1 \quad - \quad \mathfrak{b}_2, & & \mathfrak{b}_3 \quad - \quad \mathfrak{b}_4 \\ \mathfrak{c}_1 \quad - \quad \mathfrak{c}_2, & & \mathfrak{c}_3 \quad - \quad \mathfrak{c}_4; \end{array}$$

weil aber der gemeinschaftliche Tangentialpunkt zweier conjugirten Punkte und der dritte Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie und der Curve bekanntlich allemal auch ein Paar conjugirter Punkte ist, so erhalten wir auch die drei Paare conjugirter Punkte:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{a}_{12} \text{ und } \mathfrak{a}_{34} \\ \mathfrak{b}_{12} \quad - \quad \mathfrak{b}_{34} \\ \mathfrak{c}_{12} \quad - \quad \mathfrak{c}_{34}. \end{array}$$

Diese sechs Punkte liegen zu je dreien auf vier Geraden, d. h. sind die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits, welches der $c_1^{(3)}$ *einbeschrieben ist.*

Denn aus den Schematen, welche Gruppen von je neun associirten Punkten bilden:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_{12} \\ \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{b}_4 & \mathfrak{b}_{34} \\ \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_{34} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_{12} \\ \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{c}_4 & \mathfrak{c}_{34} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_{34} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_{12} \\ \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{a}_{34} \\ \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_{34} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_{12} \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_{12} \\ \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{c}_{12} \end{array}$$

folgen die vier Geraden:

$$|\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{b}_{34}\mathfrak{c}_{34}| \quad |\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{c}_{34}\mathfrak{a}_{34}| \quad |\mathfrak{c}_{12}\mathfrak{a}_{34}\mathfrak{b}_{34}| \quad |\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{c}_{12}|.$$

Bekanntlich wird durch den Process der Vierseits-Bildung allemal aus zwei Paaren conjugirter Punkte einer $c_1^{(3)}$ ein drittes Paar derselben abgeleitet.

Die sechs Paare conjugirter Punkte:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{a}_1 \text{ und } \mathfrak{a}_2, & & \mathfrak{a}_3 \text{ und } \mathfrak{a}_4 \\ \mathfrak{b}_1 \quad - \quad \mathfrak{b}_2, & & \mathfrak{b}_3 \quad - \quad \mathfrak{b}_4 \\ \mathfrak{c}_1 \quad - \quad \mathfrak{c}_2, & & \mathfrak{c}_3 \quad - \quad \mathfrak{c}_4 \end{array}$$

stehen aber in der eigenthümlichen Verbindung mit einander, dass aus ihnen nur drei neue Paare conjugirter Punkte hervorgehen, während die übrigen noch zu bildenden Paare in einander übergehen; die drei neuen Paare sind:

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4) = \mathfrak{x}_1, \quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4) = \mathfrak{y}_1, \quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4) = \mathfrak{z}_1$$
$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3) = \mathfrak{x}_2, \quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3) = \mathfrak{y}_2, \quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4, \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3) = \mathfrak{z}_2,$$

$\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$, welche demselben Systeme conjugirter Punkte angehören.

Sie hängen mit den drei Paaren

$$\mathfrak{a}_{12} \text{ und } \mathfrak{a}_{34}, \quad \mathfrak{b}_{12} \text{ und } \mathfrak{b}_{34}, \quad \mathfrak{c}_{12} \text{ und } \mathfrak{c}_{34}$$

in folgender Weise zusammen:

Aus den Gruppen von acht Punkten geht der neunte nothwendige hervor

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{b}_4 & \mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{c}_{12} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{a}_4 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{c}_3 \\ \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{c}_{12}; \end{matrix}$$

folglich ist

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2, \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1) = \mathfrak{c}_{12}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} (\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1, \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2) &= \mathfrak{c}_{34} \\ (\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_2, \mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_1) &= \mathfrak{b}_{12} \\ (\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1, \mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_2) &= \mathfrak{b}_{34} \\ (\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2, \mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_1) &= \mathfrak{a}_{12} \\ (\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1, \mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_2) &= \mathfrak{a}_{34}, \end{aligned}$$

woraus denn folgt, dass sich je drei Gerade:

$$\begin{matrix} |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2| & |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2| & \text{in einem Punkte schneiden} \\ |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1| & |\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2| & |\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4| & \text{- - - -} \\ |\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2| & \text{- - - -} \\ |\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4| & \text{- - - -} \\ |\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2| & \text{- - - -} \\ |\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1| & |\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_2| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4| & \text{- - - -}, \end{matrix}$$

und dass die sechs Punkte $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_2$ auf einem Kegelschnitt liegen.

§ 14.

Ein besonderer Fall der Configuration $(12_4, 16_3)$ *B*, welcher auf die *Hurwitz*sche Figur führt.

Wir können unsere in § 12 gegebene Construction so modificiren, dass auch die zuletzt gefundenen neuen Paare conjugirter Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ fortfallen und dadurch der Process der Vierseitsbildung einen Abschluss gewinnt, indem aus sechs Paaren conjugirter Punkte von besonderer Lage sich keine weiteren Punkte-Paare der $c_1^{(3)}$ ableiten lassen, worauf Herr *Hurwitz* (a. a. O.) zuerst aufmerksam gemacht hat. Dies tritt ein, wenn wir, anstatt von den beiden perspectiv liegenden Dreiecken aus-

zugehen

$$\frac{\begin{matrix}\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3\\ \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3\end{matrix}}{\mathfrak{a}_4},$$

jedes dieser beiden Dreiecke in eine Gerade degeneriren lassen.

Wir bringen also drei Punkte $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3$ einer Geraden mit drei Punkten $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3$ einer zweiten Geraden in perspective Lage; dann erhalten wir das *Pascal*sche Sechseck für einen in ein Linienpaar ausgearteten Kegelschnitt

$$\mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{c}_3 \quad \mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{c}_2 \quad \mathfrak{b}_3 \quad \mathfrak{c}_1,$$

für welches die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten

$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3, \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2) = \mathfrak{a}_1, \quad (\mathfrak{c}_3\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1) = \mathfrak{a}_2, \quad (\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2, \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1) = \mathfrak{a}_4$$

auf gerader Linie liegen müssen. Da nun der dritte Schnittpunkt der Geraden $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2|$ mit der Curve $c_1^{(3)}$ der Punkt $\mathfrak{a}_{12}$ war (§ 13 S. 307), so wird in diesem besonderen Falle

$$\mathfrak{a}_4 \equiv \mathfrak{a}_{12},$$

und da der conjugirte Punkt zu $\mathfrak{a}_{12}$ der Punkt $\mathfrak{a}_{34}$, zu $\mathfrak{a}_4$ aber $\mathfrak{a}_3$ ist, so folgt

$$\mathfrak{a}_3 \equiv \mathfrak{a}_{34};$$

$\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ haben aber den gemeinschaftlichen Tangentialpunkt $\mathfrak{a}_{34}$, folglich ist dieser Punkt $\mathfrak{a}_3$ Tangentialpunkt für die beiden Tangenten in $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$; die beiden Paare conjugirter Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{a}_4$ bilden also in diesem besonderen Falle ein degenerirtes Vierseit:

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1| \quad |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_1| \quad |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_2| \quad |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2|,$$

bei welchem die beiden Seiten

$$|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_1| \equiv |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_2|$$

identisch zusammenfallen, und es folgen aus demselben keine neuen Paare conjugirter Punkte. Ebenso wird, da $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3$ in gerader Linie liegen:

$$\mathfrak{b}_3 \equiv \mathfrak{b}_{12}, \quad \mathfrak{b}_4 \equiv \mathfrak{b}_{34}, \quad \mathfrak{c}_3 \equiv \mathfrak{c}_{12}, \quad \mathfrak{c}_4 \equiv \mathfrak{c}_{34};$$

also bilden auch die beiden Paare conjugirter Punkte $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$ und $\mathfrak{b}_4$ ein degenerirtes Vierseit:

$$|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_1| \quad |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_1| \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_2| \quad |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_2|,$$

bei welchem die beiden Seiten

$$|\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_1| \equiv |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_2|$$

identisch zusammenfallen, und ebenso bilden die beiden Paare conjugirter

Punkte $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_3$ und $\mathfrak{c}_4$ ein degenerirtes Vierseit:

$$|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\mathfrak{c}_1| \quad |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_1| \quad |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_2| \quad |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4\mathfrak{c}_2|,$$

bei welchem die beiden Seiten

$$|\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_1| \equiv |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_2|$$

identisch zusammenfallen. Wir sehen hieraus, dass die Punktepaare $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2$ (§ 13) in diesem besonderen Falle fortgehen oder vielmehr mit den früheren Punktepaaren zusammenfallen. Der Process der Vierseits-Bildung hat also bei diesen besonderen Punktepaaren:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{a}_1 \text{ und } \mathfrak{a}_2, & \mathfrak{a}_3 \text{ und } \mathfrak{a}_4, \\ \mathfrak{b}_1 \quad - \quad \mathfrak{b}_2, & \mathfrak{b}_3 \quad - \quad \mathfrak{b}_4, \\ \mathfrak{c}_1 \quad - \quad \mathfrak{c}_2, & \mathfrak{c}_3 \quad - \quad \mathfrak{c}_4 \end{array}$$

einen Abschluss erreicht und gestattet keine weitere Bildung neuer Punktepaare. Die Construction solcher sechs Punktepaare ist die von Herrn ***Hurwitz*** (a. a. O.) gegebene bei leichter Abänderung der Bezeichnung:

Man nehme drei Punkte $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3$ einer Geraden in perspectiver Lage mit drei Punkten $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3$ einer zweiten Geraden, so dass sich

$$|\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1| \quad |\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2| \quad |\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3|$$

in einem Punkte $\mathfrak{a}_4$ schneiden, bestimme die Schnittpunkte:

$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3, \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2) = \mathfrak{a}_1; \quad (\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3, \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1) = \mathfrak{a}_2; \quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2, \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1) = \mathfrak{a}_3;$$
$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1, \mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_3) = \mathfrak{b}_4; \quad (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3) = \mathfrak{c}_4;$$

dann müssen auch, wie oben bewiesen ist,

$$|\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2| \quad |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4|$$

auf je einer Geraden liegen, und wir haben die Configuration (k'.) (S. 301) in einem besonderen Falle; die sechs Paare conjugirter Punkte einer $c_1^{(3)}$

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{a}_1 \text{ und } \mathfrak{a}_2, & \mathfrak{a}_3 \text{ und } \mathfrak{a}_4, \\ \mathfrak{b}_1 \quad - \quad \mathfrak{b}_2, & \mathfrak{b}_3 \quad - \quad \mathfrak{b}_4, \\ \mathfrak{c}_1 \quad - \quad \mathfrak{c}_2, & \mathfrak{c}_3 \quad - \quad \mathfrak{c}_4 \end{array}$$

befinden sich in der eigenthümlichen Lage, dass sie durch den Process der Vierseits-Bildung keine neuen Punktepaare der Curve $c_1^{(3)}$ mehr liefern, sondern die alten immer in einander übergehen.

Diese eigenthümliche Lage der sechs Punktepaare lässt sich nun noch näher charakterisiren. Da nämlich $\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{a}_4$ conjugirte Punkte der $c_1^{(3)}$ sind, also denselben Tangentialpunkt haben müssen und der Tangential-

punkt zu $\mathfrak{a}_3$ der Punkt $\mathfrak{a}_{12} \equiv \mathfrak{a}_4$ ist, so ist $\mathfrak{a}_4$ auch der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{a}_4$; wenn aber ein Punkt einer Curve dritter Ordnung mit seinem Tangentialpunkt zusammenfällt, so ist dies ein Wendepunkt der Curve; also ist $\mathfrak{a}_4$ ein Wendepunkt; aus gleichem Grunde sind $\mathfrak{b}_3$ und $\mathfrak{c}_3$ Wendepunkte der $c_1^{(3)}$, mithin

$$\mathfrak{a}_4 \quad \mathfrak{b}_3 \quad \mathfrak{c}_3$$

die drei in gerader Linie liegenden reellen Wendepunkte der Curve dritter Ordnung $c_1^{(3)}$ und $\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4$ die conjugirten Punkte zu denselben in einem der drei Systeme.

Breslau, April 1891.

Ueber die sogenannten vollständigen Systeme von homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

(Von Herrn *Friedrich Schur* in Dorpat.)

Wenn ich im Folgenden auf ein Thema, welches schon oft behandelt worden ist *), auf die Integration der sogenannten vollständigen Systeme von homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, von Neuem eingehe, so sind dabei zwei Gesichtspunkte massgebend gewesen. Erstens schien es mir von Interesse, die allgemeine analytische Natur der Lösungen eines solchen Systems direct ohne Eingehen auf die eigentlichen Integrationsmethoden zu untersuchen, zumal diese Methoden keineswegs immer als wirkliche Vereinfachung des Problems betrachtet werden können. Dies ist in § 2 durch Entwickelung der Lösungen in Potenzreihen geschehen; hierbei machte nur die Berücksichtigung der Integrabilitätsbedingungen Schwierigkeiten, deren Ueberwindung nicht ohne einen Kunstgriff gelang. Zweitens aber kam es mir darauf an, die Integration des Systems mit Hülfe eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen auf ihren wahren Grund zurückzuführen, der darin liegt, dass mit einem solchen Systeme stets mindestens eine Transformationsgruppe verknüpft ist. Wenn sich hierbei auch keine neue Integrationsmethode ergiebt, so gewinnt man bei dieser Auffassung sicher den Vortheil, dass sich nach Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen eine Elimination als überflüssig erweist; die so gewonnenen Functionen liefern unmittelbar die Lösungen des vollständigen Systems. Diese Untersuchungen sind in § 3 durchgeführt

*) Was die reiche Litteratur über diesen Gegenstand betrifft, so kann man sich darüber orientiren z. B. in *Mansion*, Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris 1875. S. auch Theorie der Transformationsgruppen unter Mitwirkung von Dr. *Friedrich Engel*, bearbeitet von *Sophus Lie*, Leipzig 1888 u. *Goursat*, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris 1891.

worden und zwar ohne Voraussetzung von Sätzen aus der Theorie der Transformationsgruppen. In derselben Tendenz sind in § 1 bekannte Sätze über vollständige Systeme kurz begründet worden.

§ 1.

Definition der vollständigen Systeme.

Zur Bestimmung einer Function:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x) \tag{1.}$$

seien q ($< n$) homogene lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$X_{\mathfrak{a}} z = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{n} \xi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}(x) \frac{\partial z}{\partial x_{\mathfrak{b}}} = 0 \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, q) \tag{2.}$$

gegeben, wo die $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ analytische Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sein mögen, welche in der Nähe einer gewissen Stelle $x_{\mathfrak{a}} = c_{\mathfrak{a}}$ den Charakter rationaler Functionen besitzen. Wir können dann voraussetzen, dass nicht sämmtliche q-gliedrigen Determinanten der Matrix:

$$|\xi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}(x)| \qquad \binom{\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, q}{\mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, n} \tag{3.}$$

identisch verschwinden; denn sonst könnten obige Gleichungen durch ein System von s ($< q$) Gleichungen ersetzt werden, für welches nicht mehr die sämmtlichen s-gliedrigen Determinanten der analogen Matrix verschwinden.

Es ist klar, dass jede Function $z = f(x)$, welche das System (2.) befriedigt, wofern es überhaupt eine solche giebt, auch den folgenden Gleichungen genügt:

$$\left\{\begin{aligned} &(X_{\mathfrak{a}}, X_{\mathfrak{b}}) \equiv X_{\mathfrak{a}}(X_{\mathfrak{b}} z) - X_{\mathfrak{b}}(X_{\mathfrak{a}} z) \\ &= \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}=1}^{n} \left(\xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}}(x) \frac{\partial \xi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{c}}} - \xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x) \frac{\partial \xi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{c}}}\right) \frac{\partial z}{\partial x_{\mathfrak{b}}} = 0. \end{aligned}\right. \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, q) \tag{4.}$$

Unter diesen $\frac{1}{2}q(q-1)$ Gleichungen befinden sich nun entweder solche, welche von den Gleichungen (2.) unabhängig sind, oder es giebt keine solche unter ihnen, d. h. es verschwinden alle $(q+1)$-gliedrigen Determinanten derjenigen Matrices, welche durch Combination der Gleichungen (2.) mit irgend einer der Gleichungen (4.) entstehen. In letzterem Falle lassen sich also Functionen $\eta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}(x)$, welche rationale Functionen der $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ und ihrer ersten Ableitungen sind, so bestimmen, dass:

$$(5.)\qquad (X_{\mathfrak{a}}, X_{\mathfrak{b}}) \equiv \sum_{\mathfrak{c}=1}^{q} \eta^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(x) X_{\mathfrak{c}} z$$

ist, d. h. unabhängig von den Werthen der $\frac{\partial z}{\partial x_{\mathfrak{b}}}$.

Im ersten Falle dagegen füge man zu den Gleichungen (2.) so viele von den Gleichungen (4.) hinzu, dass ein $(q+q_1)$-gliedriges System:

$$(6.)\qquad Y_{\mathfrak{a}} z = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{n} \eta^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}(x) \frac{\partial z}{\partial x_{\mathfrak{b}}} = 0 \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, q+q_1)$$

entsteht, für welches nicht sämmtliche $(q+q_1)$-gliedrigen Determinanten der zugehörigen Matrix verschwinden; hier sind die $\eta^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}(x)$ offenbar Functionen derselben Art wie die $\xi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}(x)$.

Mit dem Systeme (6.) können wir in derselben Weise verfahren, und wir werden so fortfahrend schliesslich auf ein r-gliedriges System kommen, welches vermöge desselben Processes zu neuen Gleichungen nicht mehr führt. Hierbei kann nur der Fall in Betracht kommen, dass $r < n$ ist; denn im entgegengesetzten Falle müssten alle $\frac{\partial z}{\partial x_{\mathfrak{b}}}$ verschwinden, die gesuchte Function $z = f(x)$ könnte also nur einer Constanten gleich sein.

Ist aber $r < n$, so werden wir zeigen, dass das System durch $n-r$ unabhängige Functionen befriedigt wird. Ein solches System nennt man ein *vollständiges* und definirt dasselbe folgendermassen.

Das System (2.) *von q homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung wird ein q-gliedriges vollständiges System genannt, wenn erstens nicht alle q-gliedrigen Determinanten der Matrix* (3.) *identisch verschwinden, und wenn zweitens Identitäten von der Form* (5.) *bestehen.*

Dann gilt zunächst der folgende Satz:

Bilden die Gleichungen (1.) *ein vollständiges System, so gilt dasselbe von den Gleichungen:*

$$(7.)\qquad Z_{\mathfrak{a}} z = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{q} \psi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c}}(x) X_{\mathfrak{c}} z \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, q),$$

sobald die Determinante $|\psi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c}}(x)|$ *nicht identisch verschwindet.*

In der That finden wir:

$$(Z_{\mathfrak{a}}, Z_{\mathfrak{b}}) = \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}=1}^{q} \Big\{ \psi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c}}(x)\psi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{b}}(x)(X_{\mathfrak{c}}, X_{\mathfrak{b}}) + \big(\psi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c}}(x) X_{\mathfrak{c}}(\psi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{b}}(x)) - \psi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{c}}(x) X_{\mathfrak{c}}(\psi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}(x))\big) X_{\mathfrak{b}} z \Big\},$$

woraus durch Einsetzen der sich aus (7.) ergebenden Ausdrücke der $X_{\mathfrak{c}} z$ durch die $Z_{\mathfrak{c}} z$ der Satz folgt.



Wir werden hiernach auch ein vollständiges System, welches dem gegebenen äquivalent ist, erhalten, wenn wir dasselbe nach q von den Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x_{\mathfrak{b}}}$ auflösen, also etwa das System bilden:

$$(8.)\qquad \frac{\partial z}{\partial x_{\mathfrak{a}}} - \sum_{\mathfrak{b}=q+1}^{n} \zeta_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}(x) \frac{\partial z}{\partial x_{\mathfrak{b}}} \equiv Z_{\mathfrak{a}} z = 0 \qquad (\mathfrak{a}=1, 2, \ldots, q),$$

wo die $\zeta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ Functionen derselben Art sind wie die $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$, sodass wir dieselben bei geeigneter Wahl des Nullpunktes als gewöhnliche Potenzreihen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ voraussetzen dürfen. Sollen diese Gleichungen ein vollständiges System bilden, so muss sein:

$$(9.)\qquad (Z_{\mathfrak{a}}, Z_{\mathfrak{b}}) \equiv 0.$$

Denn in diesen Ausdrücken kommt, wie man aus Formel (4.) erkennt, keiner der Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x_{\mathfrak{a}}}$ für $\mathfrak{a} \leqq q$ vor; sollen daher alle $(q+1)$-gliedrigen Determinanten derjenigen Matrix verschwinden, welche durch Zusammenstellung der Gleichungen (8.) mit einer Gleichung von der Form:

$$\sum_{\mathfrak{b}=q+1}^{n} \zeta_{\mathfrak{b}}(x) \frac{\partial z}{\partial x_{\mathfrak{b}}} = 0$$

entstehen, so müssen die $\zeta_{\mathfrak{b}}(x)$, welche selbst solche Determinanten sind, verschwinden. Wir erhalten daher den Satz:

Die Gleichungen (8.) *bilden dann und nur dann ein vollständiges System, wenn Identitäten von der Form* (9.) *bestehen.*

§ 2.

Integration eines vollständigen Systems durch Potenzreihen.

Um zu beweisen, dass es, falls die Identitäten (9.) erfüllt sind, stets eine Function $z = f(x)$ giebt, welche die Differentialgleichungen (8.) befriedigt und ausserdem für $x_1 = x_2 = \ldots = x_q = 0$ einer beliebig vorgegebenen Potenzreihe $\varphi(x_{q+1}, \ldots, x_n)$ gleich wird, schlagen wir zunächst einen ganz directen Weg ein, indem wir die Coefficienten einer solchen Potenzreihe $z = f(x)$ zu berechnen suchen und hierauf ihre Convergenz darthun. Ist $q = 1$, so ist ja unmittelbar klar, dass man die Coefficienten der Entwickelung von $z = f(x)$ der Differentialgleichung (8.) gemäss so bestimmen kann, dass dieselbe für $x_1 = 0$ einer beliebig gegebenen Potenzreihe $\varphi(x_2, \ldots, x_n)$ gleich werde; die Convergenz dieser Reihe untersuchen wir später. Ist aber $q = 2$, so ist es schon schwer, unmittelbar zu erkennen,

dass sich für $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_0$ aus beiden Gleichungen derselbe Werth ergiebt; noch viel schwerer natürlich für die Coefficienten der Glieder höherer Ordnung. Wir schlagen daher, um einzusehen, dass die Identitäten (9.) die vollständigen Integrabilitätsbedingungen sind, den folgenden Weg ein, indem wir uns des leichteren Verständnisses wegen zunächst auf den Fall $q = 2$ beschränken.

Mit den Gleichungen (8.) oder:

$$(10.)\qquad \frac{\partial z}{\partial x_1} - \sum_{\mathfrak{b}=3}^{n} \zeta_{\mathfrak{b}}^{1}(x) \frac{\partial z}{\partial x_{\mathfrak{b}}} \equiv Z_1 z = 0,$$

$$(11.)\qquad \frac{\partial z}{\partial x_2} - \sum_{\mathfrak{b}=3}^{n} \zeta_{\mathfrak{b}}^{2}(x) \frac{\partial z}{\partial x_{\mathfrak{b}}} \equiv Z_2 z = 0$$

besteht zugleich auch die folgende:

$$(12.)\qquad Z_2(Z_1 z) \equiv Z_1(Z_2 z) = 0.$$

Wir können aber auch umgekehrt sehen, dass, wenn eine Potenzreihe $z = f(x)$ der Gleichung (12.) genügt und zugleich für $x_2 = 0$ der Gleichung (10.) und für $x_1 = 0$ der Gleichung (11.), dass sie dann die Gleichungen (10.) und (11.) auch für alle $x_{\mathfrak{c}}$ in der Nähe des Nullpunktes befriedigt. Von einer Function $z = Z_1(f(x))$, welche der Gleichung (11.) genügt und für $x_2 = 0$ verschwindet, verschwinden nämlich auch alle Ableitungen für $x_2 = 0$, sodass die Entwickelung dieser Function nach Potenzen von x_2 lauter verschwindende Coefficienten enthält; diese Function ist daher von x_2 unabhängig und zwar gleich Null, weil sie für $x_2 = 0$ verschwindet. Ebenso beweist man auf Grund der zweiten Form von (12.), dass $z = f(x)$ auch der Gleichung (11.) genügt. Durch die Festsetzung, es soll eine Function $z = f(x)$ 1) der Differentialgleichung zweiter Ordnung (12.) genügen, 2) der Gleichung (10.) für $x_2 = 0$, 3) der Gleichung (11.) für $x_1 = 0$ und 4) für $x_1 = x_2 = 0$ der beliebig vorgegebenen Potenzreihe $\varphi(x_3, \dots, x_n)$ gleich sein, sind aber die Entwickelungscoefficienten von $f(x)$ gerade und auch ohne überflüssige Gleichungen vollständig bestimmt. Die letzte Bedingung leistet dies nämlich für die Coefficienten derjenigen Glieder, welche weder x_1 noch x_2 enthalten, die dritte für diejenigen, welche wohl x_2, aber nicht x_1 enthalten, die zweite für diejenigen, welche x_1, aber nicht x_2 enthalten, die erste Bedingung endlich für alle übrigen Glieder. Denn Gleichung (12.) hat die Form:

$$(14.)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}=3}^{n} \left\{ \vartheta_{\mathfrak{b}}(x) \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_{\mathfrak{b}}} + \varkappa_{\mathfrak{b}}(x) \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_{\mathfrak{b}}} + \lambda_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}(x) \frac{\partial^2 z}{\partial x_{\mathfrak{b}} \partial x_{\mathfrak{c}}} + \mu_{\mathfrak{b}}(x) \frac{\partial z}{\partial x_{\mathfrak{b}}} \right\}.$$

Hiermit ist also gezeigt, dass die genannten Bedingungen die Entwickelungscoefficienten einer Function $z = f(x)$ nach Potenzen der $x_\mathfrak{c}$ gerade und ohne Widerspruch bestimmen, weil sie zur Berechnung jedes Coefficienten gerade nur eine Gleichung liefern. Hierbei sind die Coefficienten $p$ter Dimension dargestellt als ganze Functionen der Coefficienten bis zur $p$ten Dimension von $\varphi(x_3, \dots, x_n)$ und der Coefficienten bis zur $(p-1)$ten Dimension der $\zeta_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(x)$ mit ganzzahligen positiven Coefficienten.

Ganz ebenso kann man in dem Falle von q Gleichungen verfahren. Man kann dieselben wiederum durch die folgenden Bedingungen vollständig ersetzen. Es soll eine Function $z = f(x)$ bestimmt werden, welche erstens die Gleichung:

$$(15.) \qquad Z_\mathfrak{a}(Z_{\mathfrak{a}_1}(Z_{\mathfrak{a}_2}(\dots(Z_{\mathfrak{a}_{q-1}} z)) = 0$$

erfüllt, wo die $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_{q-1}$ die Zahlen $1, 2, \dots, q$ in irgend einer Reihenfolge sind, welche zweitens die Gleichungen:

$$(16.) \qquad Z_{\mathfrak{a}_1}(Z_{\mathfrak{a}_2}(Z_{\mathfrak{a}_3}(\dots(Z_{\mathfrak{a}_{q-1}} z)) = 0$$

für $x_\mathfrak{a} = 0$ erfüllt, drittens die Gleichungen:

$$(17.) \qquad Z_{\mathfrak{a}_2}(Z_{\mathfrak{a}_3}(\dots(Z_{\mathfrak{a}_{q-1}} z)) = 0$$

für $x_\mathfrak{a} = x_{\mathfrak{a}_1} = 0$ u. s. f., welche endlich die Gleichungen:

$$(18.) \qquad Z_\mathfrak{a} z = 0$$

erfüllt, wenn alle $x_1, x_2, \dots, x_q$ verschwinden mit Ausnahme von $x_\mathfrak{a}$, wobei zu bemerken ist, dass den Identitäten (9.) gemäss die linken Seiten aller dieser Gleichungen unabhängig sind von der Reihenfolge der Indices $\mathfrak{a}_\mathfrak{r}$.

Genügt nämlich eine Function:

$$z = Z_{\mathfrak{a}_1}(Z_{\mathfrak{a}_2}(\dots(Z_{\mathfrak{a}_{q-1}}(f(x)))$$

der Gleichung (18.), und verschwindet dieselbe für $x_\mathfrak{a} = 0$, so beweist man wie oben, dass sie für alle $x_\mathfrak{c}$ in der Nähe des Nullpunktes verschwindet. Hiermit wäre bewiesen, dass die Function $z = f(x)$ die Gleichungen:

$$(19.) \qquad Z_\mathfrak{a}(Z_{\mathfrak{a}_1}(Z_{\mathfrak{a}_2}(\dots(Z_{\mathfrak{a}_{q-2}} z)) = 0$$

erfüllt. Nun schliessen wir weiter: Genügt eine Function:

$$z = Z_{\mathfrak{a}_1}(Z_{\mathfrak{a}_2}(\dots(Z_{\mathfrak{a}_{q-2}} z))$$

der Gleichung (18.) und verschwindet sie, sobald $x_\mathfrak{a} = x_{\mathfrak{a}_{q-1}} = 0$, so verschwindet sie auch, wenn $x_{\mathfrak{a}_{q-1}} = 0$ und alle übrigen $x_\mathfrak{c}$ beliebig sind. Nun

genügt aber dieselbe Function auch der Gleichung:

$$Z_{\mathfrak{a}_{q-1}} z = 0$$

für beliebige x_c, also verschwindet sie auch für beliebige x_c. So kann man beweisen, dass die Gleichungen (17.) für beliebige x_c erfüllt sind, sobald die Indices $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots, \mathfrak{a}_{q-1}$ irgend $q-2$ verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, q$ bedeuten, und erkennt so weiter schliessend, dass eine Function $z = f(x)$, welche die obigen q Systeme von Bedingungsgleichungen erfüllt, auch unserem vollständigen Systeme (8.) für beliebige x_c genügt.

Fügen wir nun wieder die Bedingung hinzu, dass für

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_q = 0$$

die Function $z = f(x)$ einer beliebig gegebenen Potenzreihe $\varphi(x_{q+1}, \ldots, x_n)$ gleich werde, so sind hierdurch und durch die q Systeme von Bedingungsgleichungen die Coefficienten der Entwickelung von $z = f(x)$ gerade und ohne Widerspruch bestimmt; denn es ergiebt sich zur Bestimmung jedes Coefficienten eine und nur eine Gleichung. Genau wie oben ist *jeder Coefficient p ter Dimension eine ganze rationale Function der Coefficienten bis zur $p$ten Dimension von $\varphi(x_{q+1}, \ldots, x_n)$ und der Coefficienten bis zur $(p-1)$ten Dimension der $\zeta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ mit ganzzahligen positiven Coefficienten.*

Um endlich zu beweisen, dass die so bestimmte Potenzreihe wirklich einen endlichen Convergenzbezirk besitzt, wenden wir das bekannte Verfahren an. Wir beweisen, dass die so entstehende Reihe noch convergirt, wenn wir alle Coefficienten von $\varphi(x_{q+1}, \ldots, x_n)$ sowohl als von den $\zeta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ durch Grössen ersetzen, die dem absoluten Betrage nach grösser sind. Hierbei muss allerdings die Voraussetzung gemacht werden, dass diese Coefficienten sämmtlich unterhalb einer endlichen Grenze liegen. Sollte indessen diese Voraussetzung nicht erfüllt sein, so kann man dieselbe durch Einführung neuer Veränderlicher mit Hülfe der Substitution:

$$x_c = \varrho_c y_c,$$

wo ϱ_c kleiner ist als der gemeinsame Convergenzradius r_c aller dieser Reihen in Bezug auf x_c, jederzeit realisiren.

Ersetzen wir nunmehr die genannten Coefficienten durch eine Grösse g, unter welcher alle ihre absoluten Beträge liegen, so hätten wir eine Function zu bestimmen, welche die Gleichungen:

$$\frac{\partial z}{\partial x_{\mathfrak{a}}} = \left(\frac{\partial z}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \frac{g}{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}$$

erfüllt. Diese bilden jedoch kein vollständiges System; man sieht aber leicht, dass die Coefficienten der Potenzreihen, welche hierin auftreten, kleiner sind als die Coefficienten der in dem folgenden Systeme auftretenden Reihen:

$$(20.)\quad \frac{\partial z}{\partial x_\lambda} = \left(\frac{\partial z}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \frac{g}{(1-x_1-x_2-\cdots-x_q)(1-x_{q+1}-x_{q+2}-\cdots-x_n)}.$$

Hierzu kommt die Bedingung, dass für $x_1 = x_2 = \cdots = x_q = 0$

$$z = \frac{g}{1-x_{q+1}-\cdots-x_n}$$

werde. Hier haben wir ein vollständiges System, wie man auch direct daraus erkennt, dass eine Function, welche diese Gleichungen erfüllen soll, eine Function von $x = x_1+x_2+\cdots+x_q$ und $y = x_{q+1}+\cdots+x_n$ allein ist, wodurch das System (20.) in die einzige Gleichung:

$$(21.)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{(n-q)g}{(1-x)(1-y)}$$

übergeht. Soll eine Function $z = \varphi(x, y)$ diese Gleichung erfüllen und für $x = 0$ in $\frac{g}{1-y}$ übergehen, so ist sie vollkommen bestimmt und hat die Form:

$$(22.)\qquad z = \frac{g}{\sqrt{(1-y)^2+2(n-q)g\,\mathrm{lognat}\,(1-x)}}.$$

Es kann daher $\varphi(x, y)$ in eine nach Potenzen von x und y fortschreitende Reihe mit einem endlichen Convergenzbezirk entwickelt werden, a fortiori also auch die Function $z = f(x)$ in eine nach Potenzen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fortschreitende Reihe mit einem endlichen Convergenzbezirk.

Wir haben hiernach auf dem directesten Wege den folgenden Satz bewiesen:

Das vollständige System (8.), *in welchem die* $\zeta_b^i(x)$ *gewöhnliche Potenzreihen von* $x_1, \ldots, x_n$ *sind, kann stets durch eben eine solche Reihe* $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ *befriedigt werden, welche für* $x_1 = x_2 = \cdots = x_q = 0$ *einer beliebig vorgelegten Potenzreihe* $\varphi(x_{q+1}, \ldots, x_n)$ *gleich wird.*

Für das ursprüngliche System (2.) kann hieraus ein entsprechender Satz abgeleitet werden, der indessen allerlei übrigens nahe liegende Restrictionen erfordert.

§ 3.

Integration des vollständigen Systems mit Hülfe eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

Wenn der eben bewiesene Satz auch einen meist ausreichenden Aufschluss über die allgemeine analytische Natur der Lösungen eines vollständigen Systems giebt, so wird es doch in vielen Fällen nützlich sein, andere Mittel zur Herstellung dieser Lösungen kennen zu lernen, als die praktisch selten anwendbare Entwickelung in Potenzreihen sie bietet.

Hierzu führt uns am schnellsten die Bemerkung, dass $n.q$ Functionen $\sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x_1, \dots, x_n)$, welche die Identitäten:

$$(23.)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n}\left\{\frac{\partial\sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{c}}}\sigma_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(x)-\frac{\partial\sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(x)}{\partial x_{\mathfrak{c}}}\sigma_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x)\right\} = 0 \qquad (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1 = 1, 2, \dots, q;\ \mathfrak{a} = 1, 2, \dots, n)$$

befriedigen, eine Transformationsgruppe besonders einfacher Zusammensetzung bestimmen, durch welche jede Lösung des vollständigen Systems:

$$(24.)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n}\sigma_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_{\mathfrak{c}}} = 0 \qquad (\mathfrak{b} = 1, 2, \dots, q)$$

in sich selbst übergehen muss; die Functionen dieser Gruppe, welche sich durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen finden lassen, liefern uns dann die gesuchten Lösungen ganz von selbst.

Um diese Untersuchungen ohne Voraussetzung irgend welcher Sätze aus der Theorie der Transformationsgruppen durchführen zu können, gehen wir von denjenigen partiellen Differentialgleichungen aus, welche die Functionen:

$$x'_{\mathfrak{a}} = f_{\mathfrak{a}}(x_1, \dots, x_n;\ u_1, \dots, u_q)$$

unserer Transformationsgruppe bestimmen, und leiten aus ihnen alles Nöthige direct ab. Diese Differentialgleichungen sind:

$$(25.)\qquad \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x;u)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = \sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(f(x;u)),$$

woraus durch die weitere Festsetzung, dass $f_{\mathfrak{a}}(x;u)$ für $u_1 = u_2 = \dots = u_q = 0$ in $x_{\mathfrak{a}}$ übergehen soll, die Functionen $f_{\mathfrak{a}}(x;u)$ als gewöhnliche Potenzreihen der $x_{\mathfrak{a}}$ und $u_{\mathfrak{b}}$ bestimmt sind, falls die $\sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ als solche Potenzreihen gegeben sind *).

Sollen nämlich die Gleichungen (25.) erfüllt sein, so müssen gleichzeitig auch alle höheren Differentialquotienten der $f_{\mathfrak{a}}(x;u)$ nach den $u_{\mathfrak{b}}$ als

*) Vergl. *Bouquet,* Sur l'intégration d'un système d'équations etc. Bulletin des sciences math. par Darboux t. III. p. 265.

Functionen der $f_c(x;u)$ allein ausdrückbar sein; führen wir die Bezeichnung ein:

$$(26.)\qquad \frac{\partial^m f_a(x;u)}{\partial u_{b_1}\partial u_{b_2}\dots\partial u_{b_m}} = \sigma_a^{b_1,b_2,\dots,b_m}(f(x;u)),$$

so geschieht dies offenbar auf Grund der folgenden Recursionsformeln:

$$(27.)\qquad \sigma_a^{b_1,b_2,\dots,b_m}(f(x;u)) = \sum_{c=1}^{n} \frac{\partial \sigma_a^{b_1,b_2,\dots,b_{m-1}}(f(x;u))}{\partial f_c(x;u)}\, \sigma_c^{b_m}(f(x;u)).$$

Hier kommt es nur darauf an, zu zeigen, dass diese Gleichungen nicht im Widerspruche mit einander stehen, d. h. dass:

$$(28.)\qquad \sum_{c=1}^{n}\left\{\frac{\partial\sigma_a^{b_1,b_2,\dots,b_{m-1}}(x)}{\partial x_c}\,\sigma_c^{b_m}(x) - \frac{\partial\sigma_a^{b_1,b_2,\dots,b_{m-2},b_m}(x)}{\partial x_c}\,\sigma_c^{b_{m-1}}(x)\right\} = 0.$$

Führen wir hierin für $\sigma_a^{b_1,\dots,b_{m-1}}(x)$ den Werth nach Formel (27.) ein, so geht (28.) über in:

$$\sum_{c,b=1}^{n}\left\{\frac{\partial\sigma_a^{b_1,b_2,\dots,b_{m-2}}(x)}{\partial x_c\partial x_b}\left(\sigma_c^{b_m}(x)\sigma_b^{b_{m-1}}(x) - \sigma_c^{b_{m-1}}(x)\sigma_b^{b_m}(x)\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial\sigma_a^{b_1,\dots,b_{m-2}}(x)}{\partial x_b}\left(\frac{\partial\sigma_b^{b_{m-1}}(x)}{\partial x_c}\,\sigma_c^{b_m}(x) - \frac{\partial\sigma_b^{b_m}(x)}{\partial x_c}\,\sigma_c^{b_{m-1}}(x)\right)\right\} = 0.$$

Nehmen wir daher an, die Gleichungen (27.) seien bis $m-1$ widerspruchslos erfüllt, so ergiebt sich aus den Identitäten (23.) dasselbe auch für m; diese Identitäten erweisen sich hiernach als die nothwendigen und hinreichenden Integrabilitätsbedingungen des Systems (25.).

Nunmehr können wir auch die Existenz von Lösungen dieses Systems nachweisen. Bezeichnen wir nämlich mit $\frac{1}{m!}f_a^{(m)}(x;u)$ den Complex der Glieder $m$ter Dimension in $f_a(x;u)$, so ergiebt sich aus (27.):

$$(29.)\qquad f_a^{(m)}(x;u) = \sum_{c=1}^{n}\frac{\partial f_a^{(m-1)}(x;u)}{\partial x_c}\, f_c^{(1)}(x;u),$$

wo

$$(30.)\qquad f_a^{(1)}(x;u) = \sum_{b=1}^{q}\sigma_a^{b}(x)u_b.$$

Nehmen wir daher an, dass die Coefficienten der $\sigma_a^b(x)$ sämmtlich ihrem absoluten Betrage nach unterhalb g liegen, so ergiebt sich leicht, dass:

$$|f_a^{(m)}(x;u)| < 1.3\dots(2m-3)\frac{n^{m-1}g^m u^m}{(1-x)^{2m-1}},$$

wo

$$x = |x_1|+|x_2|+\dots+|x_n| \quad\text{und}\quad u = |u_1|+|u_2|+\dots+|u_q|,$$

also:

$$|f_\mathfrak{a}(x;u)-x_\mathfrak{a}| < \frac{1-x}{n}\left(1-\sqrt{1-\frac{2ngu}{(1-x)^2}}\right).$$

Aus den Formeln (29.) folgt ferner, dass die Functionen

$$x'_\mathfrak{a} = f_\mathfrak{a}(x; a_1 t, \ldots, a_q t)$$

auch den gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$(31.)\qquad \frac{dx'_\mathfrak{a}}{dt} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{q} \sigma_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(x') a_\mathfrak{b}$$

genügen. Hat man daher aus diesen Differentialgleichungen und aus der Bedingung, dass $x'_\mathfrak{a} = x_\mathfrak{a}$ werde für $t=0$, die $x'_\mathfrak{a}$ als Functionen von $x_\mathfrak{a}$, $a_\mathfrak{b}$ und t bestimmt, so braucht man hierin, um die Functionen $f_\mathfrak{a}(x;u)$ zu erhalten, nur $a_\mathfrak{b} t = u_\mathfrak{b}$ zu setzen.

Um nun die Gruppeneigenschaft dieser Functionen zu erkennen, bemerken wir, dass aus Gleichung (26.), wenn man darin erst $u_1 = u_2 = \cdots = u_q = 0$ und dann wieder $f_\mathfrak{a}(x;v)$ für jedes $x_\mathfrak{a}$ setzt, folgt:

$$(32.)\qquad \frac{\partial^m f_\mathfrak{a}(x;v)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}\partial v_{\mathfrak{b}_2}\ldots\partial v_{\mathfrak{b}_m}} = \frac{\partial^m f_\mathfrak{a}(f(x;v);0)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}\partial u_{\mathfrak{b}_2}\ldots\partial u_{\mathfrak{b}_m}},$$

welche Gleichungen identisch sind mit den folgenden:

$$(33.)\qquad f_\mathfrak{a}(x; v+u) = f_\mathfrak{a}(f(x;v);u),$$

worin die angekündigte Gruppeneigenschaft enthalten ist.

Nunmehr ist es leicht, Functionen herzustellen, welche bei den Transformationen dieser Gruppe unverändert bleiben. Unter den Gleichungen:

$$(34.)\qquad f_\mathfrak{a}(x;v) = 0$$

muss es nämlich in Rücksicht auf (25.) und der Voraussetzung gemäss, dass die Gleichungen (24.) ein q-gliedriges vollständiges System bilden, sicher q solche geben, welche nach den $v_1, v_2, \ldots, v_q$ auflösbar sind. Setzen wir voraus, dass etwa die q ersten Gleichungen ein solches System bilden, und bezeichnen mit $\psi_1(x), \ldots, \psi_q(x)$ diejenigen Functionen, durch welche hiernach die $v_1, v_2, \ldots, v_q$ vermittelst der $x_\mathfrak{a}$ darstellbar sind, so sind die Functionen:

$$(35.)\qquad z_\mathfrak{b} = f_\mathfrak{b}(x; \psi(x)) \qquad (\mathfrak{b} = q+1, \ldots, n)$$

die gesuchten Invarianten. Denn aus (34.) folgt:

$$(36.)\qquad f_\mathfrak{a}(f(x;u);\, \psi(f(x;u))) = f_\mathfrak{a}(x; u+\psi(f(x;u))) = 0 \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, q),$$

also:

$$(37.)\qquad \psi_\mathfrak{a}(f(x;u)) = \psi_\mathfrak{a}(x) - u_\mathfrak{a};$$

es wird daher wirklich:

(38.) $$f_{\mathfrak{b}}(f(x;u);\ \psi(f(x;u))) = f_{\mathfrak{b}}(x;\psi(x)) \qquad (\mathfrak{b}=q+1,\dots,n).$$

Differentiirt man diese Gleichung nach $u_{\mathfrak{c}}$ und setzt nachher $u_1 = u_2 = \dots = u_q = 0$, so ergiebt sich unmittelbar, dass die Functionen (35.) das vollständige System (24.) befriedigen. Da ferner die Gleichungen (34.) für $v_1 = v_2 = \dots = v_q = 0$ in $x_{\mathfrak{a}} = 0$ übergehen, so sieht man, dass umgekehrt die Functionen $\psi_{\mathfrak{a}}(x)$ für $x_1 = x_2 = \dots = x_q = 0$ verschwinden, die Functionen $z_{\mathfrak{b}}$ also in $x_{\mathfrak{b}}$ übergehen. Es ist daher:

$$z = \varphi(f_{q+1}(x;\psi(x)),\ \dots,\ f_n(x;\psi(x)))$$

eine Lösung des vollständigen Systems, welche für $x_1 = x_2 = \dots = x_q = 0$ in $\varphi(x_{q+1},\dots,x_n)$ übergeht. Die zur Herstellung der Functionen (35.) i. A. nothwendige Elimination wird überflüssig, wenn wir das vollständige System als in der Form (8.) gegeben annehmen, also $\sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x) = -1$ oder 0 setzen, je nachdem $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b}$, falls $\mathfrak{a} \leqq q$, dagegen $\sigma_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x) = \zeta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$, falls $\mathfrak{a} > q$. Dann wird:

(39.) $$f_{\mathfrak{a}}(x;u) = x_{\mathfrak{a}} - u_{\mathfrak{a}},$$

falls $\mathfrak{a} \leqq q$, also:

$$z_{\mathfrak{b}} = f_{\mathfrak{b}}(x_1,\dots,x_n;\ x_1,\dots,x_q).$$

Wir erhalten so schliesslich das Resultat:

Um das vollständige System:

$$\frac{\partial z}{\partial x_{\mathfrak{a}}} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{n}{}' \zeta_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}(x) \frac{\partial z}{\partial x_{\mathfrak{b}}} \qquad (\mathfrak{a}=1,2,\dots,q)$$

zu integriren, integrire man das System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1'}{dt} = -a_1,\quad \dots,\quad \frac{dx_q'}{dt} = -a_q;\quad \frac{dx_{\mathfrak{a}}'}{dt} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{q} \zeta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x') a_{\mathfrak{b}} \qquad (\mathfrak{a}=q+1,\dots,n)$$

unter der Bedingung, dass $x_{\mathfrak{a}}'$ in $x_{\mathfrak{a}}$ übergehe für $t = 0$; sind:

$$x_1' = x_1 - a_1 t,\quad \dots,\quad x_q' = x_q - a_q t;\quad x_{\mathfrak{a}}' = f_{\mathfrak{a}}(x_1,\dots,x_n;\ a_1 t,\dots,a_q t)$$

die so gewonnenen Functionen, so sind:

$$z_{\mathfrak{a}} = f_{\mathfrak{a}}(x_1,\dots,x_n; x_1,\dots,x_q) \qquad (\mathfrak{a}=q+1,\dots,n)$$

solche Lösungen des vollständigen Systems, welche für $x_1 = x_2 = \dots = x_q = 0$ in resp. $x_{\mathfrak{a}}$ übergehen und bei allen Transformationen:

$$x_1' = x_1 - u_1,\quad \dots,\quad x_q' = x_q - u_q,\quad x_{\mathfrak{a}}' = f_{\mathfrak{a}}(x;u)$$

ihre Form behalten; diese Functionen bilden eine Gruppe, es ist nämlich:

$$f_{\mathfrak{a}}(x_1-u_1,\dots,x_q-u_q, f_{q+1}(x;u),\dots,f_n(x;u);\ v) = f_{\mathfrak{a}}(x;\ u_1+v_1,\dots,u_q+v_q).$$

Ueber die Zeit und die Art der Entstehung der *Jacobi*schen Thetaformeln.

(Von *L. Kronecker.*)

Die Entdeckung der zwischen Producten von vier Thetareihen bestehenden Relation, welche durch die Formel (11.) auf S. 506 des I. Bandes von *Jacobis* gesammelten Werken:

$$(A.)\qquad \vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)+\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)$$
$$= \vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z')+\vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z')$$
$$\left(w'=\tfrac{1}{2}(w+x+y+z),\ x'=\tfrac{1}{2}(w+x-y-z),\ y'=\tfrac{1}{2}(w-x+y-z),\ z'=\tfrac{1}{2}(w-x-y+z)\right)$$

dargestellt wird, bezeichnet eine *Epoche* in der Geschichte der Theorie der elliptischen Functionen; denn es ist damit für diese Theorie ein ganz neues Fundament gewonnen worden. Welche Bedeutung *Jacobi* selbst seiner Entdeckung beigemessen hat, erhellt aus der Ueberschrift des der Entwickelung jener Thetaformel*) gewidmeten Abschnittes in den von *Rosenhain* ausgearbeiteten Universitätsvorlesungen, noch deutlicher aus den Worten, mit welchen diese Entwickelung eingeleitet wird. Die Ueberschrift lautet: „Neues Fundamentaltheorem unserer Transcendenten", und es heisst dann:

> „Wir hatten:
>
> $$\zeta(q,z)=\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} q^{i^2}z^i=\sum_i e^{i^2\log q+i\log z}=e^{-\frac{(\log z)^2}{4\log q}}\sum_i e^{\frac{(2i\log q+\log z)^2}{4\log q}},$$
>
> oder $\zeta(q,z)$, multiplicirt mit $e^{\frac{(\log z)^2}{4\log q}}$, wurde dargestellt als die Summe von Potenzen von e, deren Exponenten die Quadrate der Glieder einer nach beiden Seiten ins Unendliche sich erstreckenden arithmetischen Progression sind. Multipliciren wir solche Ausdrücke, welche dasselbe $\log q$ aber verschiedene $\log z$ haben, so werden die Exponenten unter dem Summenzeichen die Summen mehrerer Quadrate sein.

---

*) *Jacobi* hat, so viel ich weiss, die Formel in keiner der von ihm veröffentlichten Abhandlungen, sondern *nur* in seinen Universitätsvorlesungen mitgetheilt.



Multiplicirt man daher vier solche ζ, die denselben $\log q$ aber verschiedene $\log z$ haben, mit einander, so wird der Exponent die Summe von vier Quadraten. Diese Summe kann man bekanntlich auch auf andere Art als Summe von vier Quadraten darstellen, und wir erhalten durch diese einfache Operation ein allgemeines Theorem, aus dem als specielle Fälle sowohl die Verbindung unserer Transcendenten mit den elliptischen Functionen als auch alle Fundamentaltheoreme über die Addition der elliptischen Integrale der drei verschiedenen Gattungen folgen, auf die man durch künstliche und schwierige Integrationen gekommen war."

Es erscheint hiernach von besonderem Interesse, dass sich der Gedankengang, welcher *Jacobi* zur Auffindung der Thetaformel geführt hat, verfolgen und auch der Zeitpunkt dieser Auffindung genau bestimmen lässt.

Ich habe schon in meinen „Bemerkungen über die *Jacobi*schen Thetaformeln"*) auf die Beziehungen hingewiesen, welche zwischen der oben citirten Thetaformel und den Formeln in *Jacobi*s Aufsatz**) „Formulae novae in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales" bestehen. Unter diesen sind zwei als die wichtigsten herauszuheben, erstens die in dem citirten Aufsatz mit (4.) bezeichnete Formel:

$$(B.)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b + \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u+a+b) - \sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b) \\ = k^2 \sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)\sin\operatorname{am}(u+a+b), \end{cases}$$

und zweitens die mit (12.) bezeichnete:

$$(C.)\quad \frac{\Theta(0)\Theta(u+a)\Theta(u+b)\Theta(a+b)}{\Theta(a)\Theta(b)\Theta(u)\Theta(u+a+b)} = 1 + k^2 \sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u+a+b).$$

Jacobi sagt von der ersteren Formel: „Quae est formula nova, maximi momenti per totam theoriam functionum ellipticarum", und er leitet daraus zuvörderst eine mit der letzteren inhaltlich übereinstimmende Formel (9.) ab, welche er als „formula nova fundamentalis" charakterisirt. Erst dann gelangt er durch Veränderung der Bezeichnungen zu der Formel (*C.*) selbst. Nun geht aber auch umgekehrt die erstere Formel (*B.*) aus der letzteren (*C.*) hervor. Denn wenn man die Function von a, b, u, welche durch Subtraction des Ausdrucks auf der rechten Seite der Gleichung (*B.*) von dem auf der linken Seite entsteht, mit $F(a, b, u)$ bezeichnet und diejenige

*) Dieses Journal Bd. 102, S. 269.

**) Dieses Journal Bd. 15, S. 199—204. *Jacobi*s Werke, Bd. I, S. 335—341.

Function von a, b, u, welche durch Subtraction des Ausdrucks auf der rechten Seite der Gleichung (C.) von dem auf der linken Seite entsteht, mit $\Phi(a, b, u)$, so findet die Identität statt:

$$F(a, b, u) = \sin\mathrm{am}(u+a)\sin\mathrm{am}(u+b)\,\Phi(a, b, u) - \sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}(u+a+b)\,\Phi(a, b, u+iK').$$

Die beiden Formeln (B.) und (C.) sind daher vollständig äquivalent.

Bei Anwendung der Bezeichnungen der Fundamenta nimmt die Gleichung (C.) folgende Gestalt an:

$$(C'.)\quad \begin{cases} H(a)H(b)H(u)H(u+a+b)+\Theta(a)\Theta(b)\Theta(u)\Theta(u+a+b) \\ \qquad = \Theta(0)\Theta(u+a)\Theta(u+b)\Theta(a+b). \end{cases}$$

Nun ist es die Reihe:

$$\sum_n (-i)^n q^{\frac{1}{4}n^2} e^{\frac{nv\pi i}{2K}},$$

welche, je nachdem man für n alle positiven und negativen ***ungeraden*** Zahlen oder alle ***geraden*** Zahlen nimmt, die Function $H(v)$ oder $\Theta(v)$ darstellt. Die Gleichung (C'.) erscheint demnach bei Einsetzung der bezüglichen Reihen in der Form:

$$(C''.)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n_0, n_1, n_2, n_3} (-1)^{\frac{1}{2}(n_0+n_1+n_2+n_3)} q^{\frac{1}{4}(n_0^2+n_1^2+n_2^2+n_3^2)} e^{(n_0(u+a+b)+n_1 a+n_2 b+n_3 u)\frac{\pi i}{2K}} \\ \displaystyle = \sum_{m_0, m_1, m_2, m_3} (-1)^{m_0+m_1+m_2+m_3} q^{m_0^2+m_1^2+m_2^2+m_3^2} e^{(m_1(u+b)+m_2(u+a)+m_3(a+b))\frac{\pi i}{K}}, \end{cases}$$

$$(m_0, m_1, m_2, m_3, n_0, n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ n_0 \equiv n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \pmod{2})$$

und *Jacobi* hat gewiss auch in *dieser* Form die Gleichung (C.) sehr bald, nachdem er sie aus der Gleichung (B.) abgeleitet hatte, direct verificirt. Die einfachste und natürlichste Methode, welche sich hierfür darbietet, besteht in der Vergleichung der Exponenten von:

$$-1,\quad q,\quad e^{\frac{a\pi i}{K}},\quad e^{\frac{b\pi i}{K}},\quad e^{\frac{u\pi i}{K}}$$

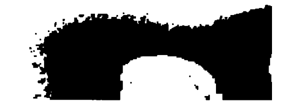
auf beiden Seiten der Gleichung (C''.). Hiernach müssen die Relationen erfüllt sein:

$$n_0+n_1+n_2+n_3 \equiv 2(m_0+m_1+m_2+m_3) \pmod{4},$$

$$n_0^2+n_1^2+n_2^2+n_3^2 = 4(m_0^2+m_1^2+m_2^2+m_3^2),$$

$$n_0+n_1 = 2(m_2+m_3),\quad n_0+n_2 = 2(m_1+m_3),\quad n_0+n_3 = 2(m_1+m_2),$$

oder also die folgenden:



$$(D.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(-n_0+n_1+n_2+n_3) = 2m_0, & \frac{1}{2}(n_0-n_1+n_2+n_3) = 2m_1, \\ \frac{1}{2}(n_0+n_1-n_2+n_3) = 2m_2, & \frac{1}{2}(n_0+n_1+n_2-n_3) = 2m_3, \end{cases}$$

in welchen die vier Ausdrücke links, wegen der Bedingung:

$$n_0 \equiv n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \pmod{2},$$

entweder sämmtlich gerade oder sämmtlich ungerade sind. Es muss deshalb ferner für je zwei, zu festen Werthen von:

$$n_0^2+n_1^2+n_2^2+n_3^2, \quad n_0+n_1, \quad n_0+n_2, \quad n_0+n_3$$

gehörige Systeme von Zahlen n_0, n_1, n_2, n_3, welchen keine ganzzahligen Werthe m_0, m_1, m_2, m_3 entsprechen, der Exponent von -1 auf der linken Seite der Gleichung (C''.), nämlich: $\frac{1}{2}(n_0+n_1+n_2+n_3)$, das eine Mal gerade und das andere Mal ungerade sein. Dies ist nun in der That der Fall; denn je zwei dieser Systeme:

$$(n_0, n_1, n_2, n_3), \quad (n_0', n_1', n_2', n_3')$$

sind durch die Relationen:

$$(E.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(n_0+n_1+n_2+n_3) = n_0', & \frac{1}{2}(n_0+n_1-n_2-n_3) = n_1', \\ \frac{1}{2}(n_0-n_1+n_2-n_3) = n_2', & \frac{1}{2}(n_0-n_1-n_2+n_3) = n_3', \end{cases}$$

mit einander verbunden. Die Differenz:

$$\tfrac{1}{2}(n_0+n_1+n_2+n_3)-\tfrac{1}{2}(n_0'+n_1'+n_2'+n_3')$$

ist hiernach gleich:

$$\tfrac{1}{2}(-n_0+n_1+n_2+n_3)$$

und also ungerade, sobald die Relationen ($D.$) nicht durch ganzzahlige Werthe von m_0, m_1, m_2, m_3 befriedigt werden.

Die durch die Relationen ($D.$) oder ($E.$) gegebene Transformation der Summationsbuchstaben n_0, n_1, n_2, n_3, welche sich bei der hier dargelegten Verification der Formel ($C.$) mit Nothwendigkeit ergiebt, legte *Jacobi* die oben angeführte, die Multiplication von vier Thetareihen betreffende Bemerkung, mit welcher er die Entwickelung des „neuen Fundamentaltheorems“ in seinen Vorlesungen eingeleitet hat, sehr nahe. Denn die Transformation:

$$\begin{aligned} n_0 &= \tfrac{1}{2}(-n_0'+n_1'+n_2'+n_3'), & n_1 &= \tfrac{1}{2}(n_0'-n_1'+n_2'+n_3'), \\ n_2 &= \tfrac{1}{2}(n_0'+n_1'-n_2'+n_3'), & n_3 &= \tfrac{1}{2}(n_0'+n_1'+n_2'-n_3') \end{aligned}$$

Wahl dieser Bezeichnungen schon aus der Zeit der ersten Auffindung der Thetaformeln stammt*).

Die vorstehenden Erwägungen führten mich schon vor vier Jahren, bei Abfassung meiner „Bemerkungen über die *Jacobi*schen Thetaformeln", auf die Vermuthung, dass *Jacobi sehr bald* nach Vollendung seines der specielleren Fundamentalformel gewidmeten, vom 21. September 1835 datirten Aufsatzes**) die allgemeinere gefunden haben möchte. Um darüber Gewissheit zu erlangen, wandte ich mich damals an Hrn. *Lindemann* in Königsberg mit der Bitte, mir aus den Akten der dortigen Universität ein Verzeichniss der von *Jacobi* gehaltenen Vorlesungen sowie Abschriften der Abgangszeugnisse von *Rosenhain* und *Borchardt* zu verschaffen. Hr. *Lindemann* erfüllte meine Bitte mit höchst dankenswerther Bereitwilligkeit, und es ergab sich nun:

> dass *Jacobi* die Vorlesungen über elliptische Functionen, welche *Rosenhain* ausgearbeitet hat, bereits im Wintersemester 1835/6, diejenigen, welche *Borchardt* gehört hat, erst im Wintersemester 1839/40 gehalten hat.

Da *Jacobi* schon beim *Beginn* der ersteren Vorlesungen, wie aus der *Rosenhain*schen Ausarbeitung deutlich zu ersehen ist, das in dem obigen Citat besprochene „neue Fundamentaltheorem der Transcendenten θ" gehabt hat, so fällt dessen Entdeckung nothwendig in die Zeit zwischen dem 21. September 1835, welches Datum jener mehrfach erwähnte *Jacobi*sche Aufsatz trägt, und dem Anfang der Wintervorlesungen. *Man kann daher mit voller Sicherheit die durch die Entdeckung der Thetarelation bezeichnete Epoche und die damit beginnende neue Phase in der Entwickelung der Theorie der elliptischen Functionen vom Ende September oder Anfang October 1835 datiren.*

Dabei ist noch hervorzuheben, dass auch die Einführung der vier Thetareihen und ihre Bezeichnung ($\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$) aus den letzten Monaten des Jahres 1835 stammt. Bis dahin hatte *Jacobi* stets die Functionen Θ, H der Fundamenta beibehalten. Aber in den ersten Vorlesungen im Wintersemester 1835/6 geht er von der Reihe aus:

*) Dass die Bezeichnungen in den früheren Vorlesungen, welche *Rosenhain* gehört hat, andere sind, spricht nicht gegen jene Annahme. Denn in diesen Vorlesungen entwickeln sich die Bezeichnungen in ganz natürlicher Weise aus einander, während in den späteren, von *Borchardt* ausgearbeiteten Vorlesungen bei Einführung der Bezeichnungen w, x, y, z gar kein Zusammenhang mit den vorhergehenden erkennbar ist.

**) Dieses Journal, Bd. XV, S. 199—204; *Jacobi*s Werke, Bd. I, S. 335—341.

$$\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} q^{i^2} z^i = 1+2q\cos x+2q^4\cos 2x+2q^9\cos 3x+\cdots \qquad (z=e^{x\sqrt{-1}}),$$

welche aus dem Θ der Fundamenta entsteht, wenn man darin $-q$ für q setzt. *Jacobi* bezeichnet diese Reihe mit $\zeta(q, z)$, definirt bald darauf eine Function $\eta(q, z)$ durch die Gleichung:

$$\eta(z) = q^{\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{2}} \zeta(q, z)$$

und führt erst *nach* Herleitung des „neuen Fundamentaltheorems", in der 26sten von den im Ganzen 75 Vorlesungen, die vier Thetareihen ϑ, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 ein, welche seitdem fast allgemein beibehalten worden sind.

Auf Grund der oben erwähnten aus Königsberg erhaltenen Schriftstücke habe ich auch genau ermitteln können, zu welcher Zeit *Jacobi* die verschiedenen, von *Rosenhain* ausgearbeiteten Vorlesungen gehalten hat. Da die Akademie diese Ausarbeitungen im Original aus dem *Rosenhain*schen Nachlass erworben hat, so führe ich dieselben hier mit den nunmehr fixirten Daten an:

1. Oberflächen zweiter Ordnung. Sommersemester 1835.
2. Theorie der elliptischen Functionen. Wintersemester 1835/6.
3. Allgemeine Theorie der krummen Linien und Oberflächen. Sommersemester 1836.
4. Theorie der Zahlen. Wintersemester 1836/37.
5. Transformation und Integration der Grundgleichungen der Dynamik. Wintersemester 1837/8.
6. Variationsrechnung. Wintersemester 1837/8.

Von den in der Bibliothek der Akademie befindlichen, ebenfalls aus *Rosenhains* Nachlass stammenden zwei Heften *Jacobi*scher Vorlesungen über die elliptischen Transcendenten, welche von *J. Th. Sanio* ausgearbeitet sind, stammt das eine aus dem Wintersemester 1829/30, das andere wahrscheinlich aus dem Sommersemester 1831*).

Um das Verzeichniss der von *Jacobi* gehaltenen Vorlesungen zu vervollständigen, habe ich mir noch das nöthige Material aus den Akten der *hiesigen* Universität verschafft, und da ein solches Verzeichniss unstreitig von hohem Interesse für die Geschichte der Mathematik ist, so lasse ich es hier folgen.

---

*) Bis hierher abgedruckt aus dem Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften vom 9. Juli 1891. Das *Rosenhain*sche Heft über Oberflächen zweiter Ordnung (Sommer 1835) ist dort nicht mit angeführt.



Jacobis Vorlesungen in Berlin.

Wintersemester	1825/26.	Privatim: Ueber die Anwendung der höheren Analysis auf die Theorie der Oberflächen und Curven doppelter Krümmung.
Sommersemester	1826.	Publice: Die allgemeine Theorie der Gleichungen.
		Privatim: Reine Analysis.

In den Verzeichnissen der angekündigten und gehaltenen Vorlesungen, welche in der Universitäts-Registratur aufbewahrt sind, ist die Colonne, welche die Anzahl der Zuhörer enthalten soll, bei allen diesen *Jacobi*schen Vorlesungen nicht ausgefüllt. Daneben findet sich — und zwar auch schon in dem Verzeichnisse von 1825/6 — der Vermerk, dass *Jacobi* nach Königsberg versetzt sei. Die Akten der Quästur reichen nur bis 1829 zurück. Es hat sich daher nicht aktenmässig feststellen lassen, ob *Jacobi* die Vorlesung im Winter 1825/6, welche in der *Dirichlet*schen Gedächtnissrede ausdrücklich als wirklich gehalten erwähnt wird, zu Ende geführt und ob er im Sommersemester 1826 überhaupt irgend eine Vorlesung gehalten hat.

Jacobis Vorlesungen in Königsberg.

Wintersemester	1826/27.	Publice: Analytische Uebungen.
		Privatim: 1. Trigonometrie. 2. Analytische Geometrie.
Sommersemester	1827.	Publice: 1. Variationsrechnung. 2. Theorie der krummen Oberflächen. 3. Elementargeometrie.
Wintersemester	1827/28.	Publice: Kegelschnitte.
		Privatim: Elementargeometrie.
Sommersemester	1828.	Publice: Arithmetik.
Wintersemester	1828/29.	Publice: Theorie der Kegelschnitte.
Sommersemester	1829.	Nicht gelesen.
Wintersemester	1829/30.	Publice: Anfangsgründe der Theorie der elliptischen Transcendenten.
		Privatim: Theorie der Oberflächen der zweiten Ordnung.
Sommersemester	1830.	Publice: Allgemeine Theorie der Oberflächen und Curven.
Wintersemester	1830/31.	Publice: Kegelschnitte.
		Privatim: Höhere Arithmetik.
Sommersemester	1831.	Publice: Elliptische Transcendenten, achtstündig.
Wintersemester	1831/32.	Publice: Auserlesene Kapitel des höheren Calculs.
		Privatim: Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung.
Sommersemester	1832.	Publice: Oberflächen zweiter Ordnung.
		Privatim: Allgemeine Theorie der Curven und Flächen.
Wintersemester	1832/33.	Publice: Allgemeine Theorie der Oberflächen (Fortsetzung).
		Privatim: Elliptische Transcendenten.
Sommersemester	1833.	Publice: Variationsrechnung.
		Privatim: Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung.
Wintersemester	1833/34.	Privatim: Theorie der Zahlen.
Sommersemester	1834.	Privatim: Analytische Theorie der Wahrscheinlichkeit.
Wintersemester	1834/35.	Publice: 1. Theorie der partiellen Differentialgleichungen. 2. Wöchentliche Aufgaben im mathematischen Seminar.

	Privatim: Theorie der Oberflächen und Linien doppelter Krümmung.
Sommersemester 1835.	Publice: 1. Variationsrechnung. 2. Mathematisch-physikalisches Seminar*.
	Privatim: Oberflächen zweiter Ordnung*.
Wintersemester 1835/36.	Publice: Uebungen des Seminars in der Mechanik*.
	Privatim: 1. Integralrechnung. 2. Vorlesungen über die elliptischen Transcendenten*.
	Hierbei findet sich der Vermerk: „Da die zehnstündigen Vorlesungen über die elliptischen Transcendenten die Kräfte der Zuhörer in hohem Grade in Anspruch nahmen, so hielt ich es für zweckmässig, die Uebungen des Seminars bereits Neujahr einzustellen. *C. G. J. Jacobi.*"
Sommersemester 1836.	Publice: Mathematisches Seminar*.
	Privatim: Allgemeine Theorie der Oberflächen*.
Wintersemester 1836/37.	Privatim: Zahlentheorie*.
Sommersemester 1837.	Publice: Mathematisches Seminar*.
	Hierbei findet sich der Vermerk: „Meine achtstündigen Privatvorlesungen über Variationsrechnung sind nicht zu Stande gekommen. *C. G. J. Jacobi.*"
Wintersemester 1837/38.	Publice: Seminar*.
	Privatim: 1. Variationsrechnung*. 2. Mechanik*.
Sommersemester 1838.	Publice: Mathematisches Seminar.
	Privatim: Anfangsgründe der analytischen Geometrie.
Wintersemester 1838/39.	Privatim: 1. Theorie der Oberflächen. 2. Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der Reihen.
Sommersemester 1839.	Hier ist vermerkt: „Hat nicht gelesen, weil er verreist war."
Wintersemester 1839/40.	Privatim: Elliptische Transcendenten [1]).
Sommersemester 1840.	Publice: Mathematisches Seminar.
	Privatim: Allgemeine Theorie der Oberflächen und doppelt gekrümmter Linien.
Wintersemester 1840/41.	Publice: Mathematisches Seminar.
	Privatim: Höhere Mathematik.
Sommersemester 1841.	Publice: Mathematisches Seminar.
	Privatim: Variationsrechnung.
Wintersemester 1841/42.	Publice: 1. Theorie der Differentialgleichungen. 2. Mathematisches Seminar.

* Die mit * bezeichneten Vorlesungen hat *Rosenhain* gehört.

[1]) Dies ist die einzige *Jacobi*sche Vorlesung, welche *Borchardt* während seiner Studienzeit an der Königsberger Universität (26. April 1839 bis 6. Juni 1840), nach Ausweis seines Abgangszeugnisses, gehört hat. Er hat ausserdem noch am mathematischen Seminar, wohl nur im Anfange des Sommersemesters 1840, theilgenommen.

	Privatim: Theorie der Oberflächen und Curven.
Sommersemester 1842.	Publice: 1. Differentialgleichungen. 2. Seminar.
Wintersemester 1842/43.	Publice: Mathematisches Seminar.
	Privatim: Analytische Mechanik [1]).

(In die Zeit vom Sommer 1843 bis zum Winter 1844/5 fällt *Jacobis* Reise nach Italien.)

Jacobis Vorlesungen in Berlin.

Sommersemester 1845.	Privatim: 1. Die Fundamente der Theorie der elliptischen Functionen, 28. April bis 15. August; 14 Zuhörer. 2. Algebra und Einleitung in die Analysis des Unendlichen, 3. Mai bis 14. August; 25 Zuhörer.
Wintersemester 1845/46.	Privatim: Differential- und Integralrechnung, 30. October bis 16. März; 23 Zuhörer.
Sommersemester 1846.	Privatim: Die allgemeine Theorie der Oberflächen und Linien doppelter Krümmung, 4. Mai bis 24. Juli; 12 Zuhörer.
Wintersemester 1846/47.	Privatim: Die Theorie der Zahlen. Hierbei findet sich der Vermerk: „Ich habe meiner Gesundheit wegen die Vorlesung nicht gehalten. *Jacobi.*"
Sommersemester 1847.	*Jacobi* hat keine Vorlesung angekündigt und, nach den Akten der Quästur, auch keine Vorlesung gehalten.
Wintersemester 1847/48.	*Jacobi* hat keine Vorlesung angekündigt aber, nach den Akten der Quästur, eine solche über analytische Mechanik vor 17 Zuhörern gehalten.
Sommersemester 1848.	Privatim: Höhere Algebra, 10. Mai bis 11. August; 13 Zuhörer.
Wintersemester 1848/49.	Privatim: Differentialrechnung mit verschiedenen Anwendungen, vom 30. October an; 7 Zuhörer. Hierbei findet sich der Vermerk: „Ich habe statt der angezeigten Vorlesung eine andere über elliptische Functionen gehalten." *Jacobi.*
Sommersemester 1849.	Privatim: Variationsrechnung nebst Anwendung auf isoperimetrische Aufgaben, vom 30. April bis 8. August; 11 Zuhörer.
Wintersemester 1849/50.	Privatim: Die allgemeine Theorie der Flächen und Curven doppelter Krümmung, 29. October bis 13. März; 11 Zuhörer.
Sommersemester 1850.	Privatim: Zahlentheorie und ihre Anwendung auf die Kreistheilung, 30. April bis 14. August; 12 Zuhörer.
Wintersemester 1850/51.	Keine Vorlesung angekündigt.

Jacobi starb am 18. Februar 1851.

[1]) Diese Vorlesung hat, soviel ich glaube, ebenfalls *Borchardt* gehört. Er hatte sich zum Zwecke seiner Promotion, nochmals nach Königsberg begeben.

Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen zur Bestimmung des Geschlechtes einer beliebigen algebraischen Function.

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

1.

Wenn bei einer algebraischen Function s, die einer irreductibelen Gleichung $n$ten Grades in Bezug auf s, $F(\overset{n}{s}, x) = 0$, mit dem Coefficienten von s^n gleich 1 genügt, die *n Zweige linearunabhängig* sind, so kann man an den Stellen, an welchen die Discriminante verschwindet, so wie bei $x = \infty$, *die Ordnungen der Verzweigungen von s vor der Entwickelung der Zweige* erkennen nach einem Verfahren, welches in der Abhandlung des Verfassers „Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf die algebraischen Functionen" Bd. 104 dieses Journals No. 5 I und II aufgestellt ist. Dieses Verfahren gründet sich auf die Ermittelung der Wurzeln der bei einem solchen Punkte bestehenden Exponentengleichung der homogenen linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit rationalen Coefficienten, welcher die algebraische Function genügt, und diese Wurzeln bei einem Punkte im Endlichen sind n von einander verschiedene positive rationale Zahlen, in welchen der Nenner höchstens gleich n ist. Das bezügliche Verfahren wird hier in No. 3 angegeben.

Die Zahl p, das Geschlecht der algebraischen Function s, ergiebt sich dann unmittelbar aus der Formel von *Riemann* (Theorie der *Abel*schen Functionen No. 7), die auch für den Fall beliebiger Windungspunkte gilt (siehe Herrn *C. Neumanns* Vorlesungen über die *Abel*schen Integrale 2. Aufl. p. 171), $2(p-1) = w-2n$, wo w die Summe der Ordnungen der Verzweigungen ist, und jeder μ-blättrige Windungspunkt als Verzweigung $(\mu-1)$-facher Ordnung zählt, n die Anzahl der Zweige.

2.

Es sei nun eine *beliebige* algebraische Gleichung $n$ten Grades in Bezug auf z

$$(1.)\qquad f(\overset{n}{z}, x) = 0$$

vorgelegt, in welcher die Coefficienten ganze rationale Functionen von x sind. Der Coefficient c_0 von z^n ist gleich 1 angenommen, da man sonst, nachdem die Gleichung mit c_0^{n-1} multiplicirt ist, $c_0 z = z'$ setzen kann und auf den vorigen Fall zurückkommt. $f(z)$ soll mit $\frac{\partial f(z)}{\partial z}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Werden bei einem Punkte a, in welchem die Discriminante nicht verschwindet, die Entwickelungen der n Zweige nach Potenzen von $x-a$ bis zu der Potenz vorgenommen, deren Exponent gleich dem höchsten Exponenten von x in $f(\overset{n}{z}, x) = 0$ ist, so kann man vermittelst derselben, wie in Abhandlung Bd. 104 No. 1 angegeben ist, die Gleichung $f(\overset{n}{z}, x) = 0$ in Bezug auf die Reductibilität untersuchen. Dieselbe wird also nun als irreductibel vorausgesetzt.

Dann wird rational aus z und x nach den hier in No. 4 gemachten Angaben eine algebraische Function s

$$(2.)\qquad s = \varDelta_0 + \varDelta_1 z + \varDelta_2 z^2 + \cdots + \varDelta_{n-1} z^{n-1},$$

wo die $\varDelta$ ganze rationale Functionen von x sind, hergestellt, so dass die n Zweige von s linearunabhängig sind. Werden diese n linearunabhängigen Functionen in einem Gebiete, wo sie einwerthig und stetig sind, betrachtet, so ergiebt sich, dass sie in einem Punkte und daher in der Nähe dieses Punktes unter einander verschieden sind, und da man auf demselben Wege, wie bei z, von jedem dieser Zweige zu jedem anderen gelangen kann, so ist s eine irreductibele algebraische Function. Die irreductibele algebraische Gleichung $n$ten Grades, welcher dieselbe genügt, erhält man, indem man aus (2.) mit Hülfe von (1.) die Gleichungen bildet

$$(3.)\qquad s^\lambda = k_{\lambda 0} + k_{\lambda 1} z + k_{\lambda 2} z^2 + \cdots + k_{\lambda, n-1} z^{n-1} \qquad (\lambda = 1, \ldots n),$$

wo die k ganze rationale Functionen von x sind. Aus diesem Gleichungssysteme folgt

$$(4.)\qquad \begin{vmatrix} s - k_{10} & k_{11} & \ldots & k_{1,n-1} \\ s^2 - k_{20} & k_{21} & \ldots & k_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s^n - k_{n0} & k_{n1} & \ldots & k_{n,n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Der Coefficient von s^n in der Gleichung (4.), die Determinante $\Sigma \pm k_{11} k_{22} \dots k_{n-1,n-1}$ ist von Null verschieden, weil man sonst aus den $n-1$ ersten Gleichungen (3.) eine Gleichung für s niedrigeren als $n$ten Grades mit rationalen Coefficienten, die nicht alle verschwinden, herleiten könnte. Wird durch diesen Coefficienten von s^n das Gleichungspolynom (4.) dividirt, so erhält man ganze rationale Functionen von x als Coefficienten, da die n Zweige von s für endliche Werthe von x endlich sind. Man hat also eine rational aus z und x hergestellte irreductibele algebraische Function s, deren n Zweige linearunabhängig sind, und kennt deren irreductibele Gleichung

$$(5.) \qquad s^n + A_1 s^{n-1} + \dots + A_n = 0,$$

wo die A ganze rationale Functionen von x sind.

Da die irreductibele algebraische Function s eine Function von x in derselben n-blättrigen Ebene, wie die Function z, ist, also die Verzweigungen von s und z dieselben sind, so ist das Geschlecht p von s dasselbe wie das von z.

Man kann daher nun zur Aufsuchung dieser Zahl p die Gleichung (5.) *zu Grunde legen.* Die homogene lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich Eins, welcher die n linearunabhängigen Zweige der Function s genügen, ergiebt sich unmittelbar aus Formel Abhandlung Bd. 104 No. 1 (9.).

Verzweigungen der aus z und x rational dargestellten Function s können nur an den Stellen auftreten, an welchen die Discriminante von $f(\overset{n}{z}, x) = 0$ verschwindet, und bei $x = \infty$. Zur Aufsuchung jener Stellen wird nach bekannten Regeln der Algebra durch rationale Operationen das Polynom der Discriminante als Product $d_1 d_2^2 d_3^3 \dots$ dargestellt, wo in allen d nur von einander verschiedene lineare Factoren vorkommen. Da die Discriminante (abgesehen vom Vorzeichen) das Quadrat des Productes aller Differenzen der n Zweige von $f(z) = 0$ ist, so ergiebt sich, dass die vorhin genannte Darstellung für gewöhnlich auf eine solche Zerfällung der Discriminante führen wird, aus welcher die Stellen, an denen die Discriminante verschwindet, durch eine einfache Rechnung hervorgehen. *Sodann wird an jeder dieser Stellen das Verfahren, welches in* No. 3 *angegeben ist, angewandt, um die Ordnungen der Verzweigungen von s zu ermitteln.* Bei $x = \infty$ ist $x = t^{-1}$ zu setzen, und wenn in Gleichung (5.) die höchste Potenz von x die $m$te ist, so wird, nachdem Gleichung (5.) mit t^{mn} multiplicirt ist, $t^m s = u$

in (5.) und in der Differentialgleichung gesetzt; dann ist, um die Ordnungen der Verzweigungen von u bei $t = 0$ zu ermitteln, wieder das Verfahren in No. 3 anzuwenden. Sind die Ordnungen der Verzweigungen von s bekannt, so ergiebt sich, wie in No. 1 gesagt, aus der Formel $2(p-1) = w-2n$ die Zahl p.

Wenn, wie dieses bei dem Verfahren in Nr. 3 vorkommt, von den Wurzeln einer gegebenen algebraischen Gleichung $n$ten Grades bereits bekannt ist, dass dieselben von einander verschiedene positive rationale Zahlen sind, die in der kleinsten Benennung Nenner haben höchstens gleich dem Grade der Gleichung, so wird die Aufsuchung der Wurzeln sofort auf die der ganzzahligen Wurzeln von höchstens n Gleichungen zurückgeführt und diese Aufsuchung kann man als eine directe Rechnung ansehen.

Nun lässt sich das Resultat in folgender Weise ausdrücken.

Von einer beliebigen algebraischen Gleichung $n$ten Grades von z $f(\overset{n}{z}, x) = 0$ mit ganzen rationalen Coefficienten von x und dem Coefficienten der höchsten Potenz von z gleich 1, deren Discriminante nicht identisch verschwindet, seien bei einem einzelnen beliebigen Punkte $x = a$ im Endlichen, in welchem die Discriminante nicht verschwindet, die Werthe der n Wurzeln z aufgestellt. Die Gleichung sei ferner als irreductibel nachgewiesen. Die Punkte, in denen die Discriminante verschwindet, seien ermittelt. Dann wird das Geschlecht p der algebraischen Function z durch eine directe Rechnung bestimmt. Alle bezüglichen Operationen sind ausführbar, wenn die Constanten in $f(\overset{n}{z}, x)$ algebraische Zahlen sind. Diese Methode, die Zahl p zu bestimmen, ist eine elementare.

3.

Um die Ordnungen der Verzweigungen der algebraischen Function s Nr. 2 (5.) bei einem Punkte $x = a$ aufzufinden, dient folgendes Verfahren.

Die n Zweige von s sind linearunabhängig. Die homogene lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1, welcher dieselben genügen, ist gegeben durch Formel Abh. Bd. 104 Nr. 1 (9.). Bei dem betreffenden Punkte $x = a$ wird die Exponentengleichung dieser Differentialgleichung aufgestellt. Diese Gleichung ist folgende, wenn der Coefficient der $(n-\alpha)$ten Ableitung in der Differentialgleichung durch p_α bezeichnet wird:

$$r(r-1)\dots(r-n+1)+(p_1(x-a))_{x=a}r(r-1)\dots(r-n+2)$$
$$+(p_2(x-a)^2)_{x=a}r(r-1)\dots(r-n+3)+\dots+(p_n(x-a)^n)_{x=a} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind von einander verschiedene rationale Zahlen $\geqq 0$, die, wenn sie auf die kleinste Benennung gebracht sind, Nenner $\leqq n$ haben (Abh. Bd. 104 Nr. 2).

Nun ergeben sich die Ordnungen der Verzweigungen bei $x=a$ aus folgenden beiden Sätzen, welche in Abh. Bd. 104 Nr. 5 I. und II. bewiesen sind:

I. Wenn alle Wurzeln der Exponentengleichung ganzzahlig sind, so sind die n Zweige in der Umgebung von $x=a$ einwerthig, und umgekehrt.

II. Wenn die Wurzeln der Exponentengleichung nicht alle ganzzahlig sind, so seien dieselben auf die kleinste Benennung gebracht, nun sei der grösste Nenner λ.

Dann giebt es unter den n Wurzeln λ, die auf den gemeinschaftlichen Nenner λ gebracht werden können und sich zu je zweien nicht um eine ganze Zahl unterscheiden. Solcher Systeme von λ Wurzeln giebt es möglicherweise mehrere. Eines dieser Systeme sei herausgenommen.

Bei den übrig bleibenden $n-\lambda$ Wurzeln sei der grösste Nenner μ, wo $\mu \leqq \lambda$.

Dann giebt es unter diesen $n-\lambda$ Wurzeln μ, die auf den gemeinschaftlichen Nenner μ gebracht werden können und sich zu je zweien nicht um eine ganze Zahl unterscheiden. Ein solches System, deren möglicherweise mehrere vorkommen, sei herausgenommen.

Bei den übrig bleibenden $n-\lambda-\mu$ Wurzeln sei der grösste Nenner ν, wo $\nu \leqq \mu$.

Dann giebt es unter diesen $n-\lambda-\mu$ Wurzeln ν, die auf den gemeinschaftlichen Nenner ν gebracht werden können und sich zu je zweien nicht um eine ganze Zahl unterscheiden. Ein solches System sei herausgenommen.

In dieser Weise ist fortzufahren, bis zuletzt noch eine Anzahl γ, $\gamma \geqq 0$, ganzzahliger Wurzeln übrig bleibt.

Dann ist bei dem betrachteten Punkte ein λ-blättriger, ein μ-blättriger, ein ν-blättriger etc. Windungspunkt vorhanden, und es giebt γ einwerthige Zweige.

4.

Es soll rational aus z und x eine algebraische Function s Nr. 2 (2.) hergestellt werden, deren n Zweige linearunabhängig sind. Werden die n Zweige von s durch s_1, s_2 bis s_n bezeichnet, so sind dieselben linearunabhängig, wenn die Determinante

$$(1.)\qquad \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \frac{ds_1}{dx} & \frac{ds_2}{dx} & \cdots & \frac{ds_n}{dx} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{n-1}s_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}s_2}{dx^{n-1}} & \cdots & \frac{d^{n-1}s_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist.

Bei einem Punkte $x=a$, in welchem die Discriminante von $\overset{n}{f}(z, x)=0$ nicht verschwindet, und die n von einander verschiedenen Werthe von z bekannt sind, werden die Entwickelungen der n Zweige z_1, z_2 bis z_n nach Potenzen von $x-a$ bis zu der Potenz $(x-a)^{n-1}$ aufgestellt. Nun seien n Grössen s'_1, s'_2 bis s'_n

$$(2.)\qquad \begin{cases} s'_1 = a_{11}+a_{12}(x-a)+\cdots+a_{1n}(x-a)^{n-1}, \\ s'_2 = a_{21}+a_{22}(x-a)+\cdots+a_{2n}(x-a)^{n-1}, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ s'_n = a_{n1}+a_{n2}(x-a)+\cdots+a_{nn}(x-a)^{n-1} \end{cases}$$

beliebig so gewählt, dass nur die Determinante $\Sigma\pm a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ nicht verschwindet. Wenn man nun eine rational aus z und x zusammengesetzte Function s so bestimmt, dass die n Zweige s_1, s_2 bis s_n in den n ersten Gliedern bezüglich mit s'_1, s'_2 bis s'_n übereinstimmen, so ist die Determinante (1.) in $x=a$ und daher auch in der Nähe von $x=a$ von Null verschieden, und die n Zweige von s sind linearunabhängig. Um diese Uebereinstimmung der Zweige von s in den n ersten Gliedern bezüglich mit den s' zu erzielen, wird ein Verfahren angewandt nach Art eines solchen, welches in den Vorlesungen des Herrn *Weierstrass* zur Darstellung einer algebraischen Function mit speciellen Eigenschaften an den Verzweigungsstellen vorkommt. Es werde das Gleichungssystem

$$(3.)\qquad s'_\lambda = c_0+c_1z_\lambda+c_2z_\lambda^2+\cdots+c_{n-1}z_\lambda^{n-1} \qquad (\lambda=1,\ldots n)$$



angesetzt. Aus demselben ergiebt sich

$$(4.)\qquad c_\alpha = \frac{D_\alpha}{D} \qquad (\alpha = 0, \dots n-1),$$

wo

$$(5.)\qquad D_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{\alpha-1} & s_1' & z_1^{\alpha+1} & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \dots & z_2^{\alpha-1} & s_2' & z_2^{\alpha+1} & \dots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & \dots & z_n^{\alpha-1} & s_n' & z_n^{\alpha+1} & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$(6.)\qquad D = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

D ist für $x=a$ von Null verschieden, da je zwei Zweige von z in $x=a$ von einander verschieden sind. Der Theil der Entwickelung von D nach Potenzen von $x-a$ bis zu der Potenz $(x-a)^{n-1}$ sei durch Δ bezeichnet. In den einzelnen Elementen der Determinante D_α sei die Entwickelung nach Potenzen von $x-a$ bis zur Potenz $(x-a)^{n-1}$ vorgenommen, und wenn diese Grössen an Stelle der Elemente in D_α eingesetzt werden und die Entwickelung der hierdurch entstehenden Determinante nach Potenzen von $x-a$ bis zur Potenz $(x-a)^{n-1}$ vorgenommen wird, so sei die hierdurch hervorgehende ganze rationale Function durch Δ_α bezeichnet, dieselbe ist höchstens $(n-1)$ten Grades. Ebenso wird Δ bestimmt. Dann stimmt die Entwickelung von $\frac{D_\alpha}{D}$ bis zur Potenz $(x-a)^{n-1}$ mit derjenigen von $\frac{\Delta_\alpha}{\Delta}$ überein. Daraus folgt weiter, dass die Entwickelung von

$$(7.)\qquad \frac{\Delta_0}{\Delta} + \frac{\Delta_1}{\Delta} z_\lambda + \frac{\Delta_2}{\Delta} z_\lambda^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta} z_\lambda^{n-1} \qquad (\lambda = 1, \dots n)$$

bis zu der Potenz $(x-a)^{n-1}$ mit s_λ' übereinstimmt. Es ist mithin (7.) eine Function s von der verlangten Eigenschaft. Die n Zweige von (7.) sind also linearunabhängig, und sie behalten diese Eigenschaft nach Multiplication mit Δ. Eine algebraische Function s, die eine ganze rationale Function von z und x ist und deren n Zweige linearunabhängig sind, wie eine solche in No. 2 (2.) vorkommt, wird demnach durch den Ausdruck

$$(8.)\qquad s = \Delta_0 + \Delta_1 z + \Delta_2 z^2 + \dots + \Delta_{n-1} z^{n-1}$$

gegeben.

Verhalten des Logarithmus einer elliptischen Function.

(Von Herrn *F. Schottky* in Zürich.)

Bedeutet $\varphi(u)$ eine elliptische Function, so bestimmt sich die Aenderung, welche $\log\varphi(u)$ erfährt, wenn u einen geschlossenen Weg durchläuft, durch die Anzahl der innerhalb liegenden Null- und Unendlichkeitspunkte. Anders verhält es sich, wenn man statt des geschlossenen Weges einen nicht geschlossenen nimmt, der von einem Punkte u' zu einem congruenten, um eine Periode verschiedenen, u'', führt. $\varphi(u)$ nimmt am Endpunkt denselben Werth an, wie am Anfangspunkt, aber $\log\varphi(u)$ kann sich um ein Vielfaches von $2\pi i$ geändert haben; es fragt sich: wie ist dieses Vielfache von $2\pi i$ zu bestimmen?

Der Voraussetzung nach ist $u''-u'$ eine Periode. Wir construiren über der Geraden $u'u''$ ein Perioden-Parallelogramm, und zwar nach der positiven oder linken Seite. Die vier Ecken:

$$u',\quad u'',\quad u''',\quad u''''$$

sind sämmtlich congruent u', aber $u''-u'$, $u''''-u'$ brauchen nicht nothwendig primitive Perioden zu sein. Wir suchen dann alle Null- und Unendlichkeitspunkte von $\varphi(u)$ auf, die in dieser Fläche liegen, und bestimmen ihre senkrechten Abstände von der Grundlinie $u'u''$ oder auch von einer zu ihr parallelen Geraden G. Die von u' ausgehenden Seiten mögen noch zur Fläche hinzugerechnet werden, die beiden anderen Seiten dagegen nicht. Jeden Abstand dividiren wir durch die Höhe des Parallelogramms, und geben ihm positives oder negatives Zeichen, je nachdem der Punkt links oder rechts von G liegt. Sind dann

$$e_1,\quad e_2,\quad \ldots,\quad e_n$$

diese Verhältnisszahlen für die Abstände der Nullpunkte,

$$e'_1,\quad e'_2,\quad \ldots,\quad e'_n$$

die entsprechenden Zahlen für die Unendlichkeitspunkte, so ist

$$(1.)\qquad e_1+e_2+\cdots+e_n-(e_1'+e_2'+\cdots+e_n') = k$$

eine ganze Zahl, und es ist $-2k\pi i$ die Aenderung, welche $\log\varphi(u)$ erfährt, wenn u die gerade Linie von u' nach u'' durchläuft.

Spricht man das Resultat in dieser Form aus, so lässt es sich leicht auch auf den Fall ausdehnen, wo die Linie, in der sich u von u' nach u'' bewegt, eine gebrochene oder krumme ist. Man hat dann im Periodenparallelogramm nicht nur die Grundlinie $u'u''$ durch diese krumme zu ersetzen, sondern auch die gegenüberliegende Seite durch die entsprechende Parallelcurve, während die beiden anderen Seiten ungeändert bleiben können. Hier sind wieder die singulären Punkte innerhalb dieser krummlinig begrenzten Figur aufzusuchen, und deren Abstände von G so wie vorher zu bestimmen. So bleibt auch für den neuen Weg die Formel richtig:

$$(2.)\qquad \int_{u'}^{u''} d\log\varphi(u) = -\Sigma(e_a-e_a').2\pi i.$$

Denn es sei z. B. u_a ein Nullpunkt von $\varphi(u)$ im ursprünglichen geradlinigen Parallelogramm, und es mögen, wenn $u'''' = u'+2\omega'$ gesetzt wird, m Punkte

$$u_a-2\omega',\quad u_a-4\omega',\quad \ldots,\quad u_a-2m\omega'$$

zwischen der geraden Linie $u'u''$ und dem neuen Wege liegen. Für u_a tritt dann im neuen Bereich $u_a-2m\omega'$ ein. Deshalb vermindert sich e_a um m, und um denselben Betrag die Zahl k, wie es sein muss.

Der Einfachheit wegen aber betrachten wir nur geradlinige Wege, und wir nehmen ausserdem $u' = 0$ an, was den Beweis abkürzt, ohne die Gültigkeit des Satzes zu beeinträchtigen.

Es ist jetzt $u' = 0$, die übrigen Endpunkte sind Perioden:

$$u'' = 2\omega,\quad u'''' = 2\omega',\quad u''' = 2\omega+2\omega'.$$

Es seien u_a, v_a $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ die Null- und Unendlichkeitspunkte von $\varphi(u)$ im Periodenparallelogramm:

$$\varphi(u_a) = 0,\quad \varphi(v_a) = \infty.$$

Dann gilt die Relation

$$(3.)\qquad \Sigma u_a - \Sigma v_a = 2h\omega+2k\omega',$$

wo h und k ganze Zahlen bedeuten. Führen wir ein:

$$x = e^{\frac{2\pi i u}{2\omega}},\quad q = e^{\frac{2\pi i.2\omega'}{2\omega}},$$



und nennen x_a, y_a die Werthe von x, die den Punkten u_a, v_a entsprechen, so ist nach (3.):

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{y_1 y_2 \ldots y_n} = q^k.$$

Wenn wir daher bilden:

$$R(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x-y_1)(x-y_2)\ldots(x-y_n)},$$

so hat $R(x)$ den Werth Eins für $x=\infty$, den Werth q^k für $x=0$. Die einzelnen x_a, y_a sind Grössen, deren Betrag zwischen 1 und $|q|$ liegt; $|q|$ selbst ist kleiner als 1.

Durchläuft u die Gerade von 0 bis 2ω, so beschreibt x im positiven Sinn einen Kreis vom Radius 1 um den Nullpunkt. Alle $2n$ singulären Punkte liegen auf der gleichen Seite dieses Kreises. Dasselbe gilt, wenn λ irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, von $\log R(xq^\lambda)$. Folglich ist die Aenderung, welche diese Logarithmen erleiden, wenn u die Gerade von 0 bis 2ω durchläuft, gleich 0. — Bilden wir nun:

$$Q(x) = \frac{x-c}{x-cq^k} R(x),$$

indem wir unter c ebenfalls einen Werth verstehen, dessen Betrag zwischen 1 und $|q|$ liegt, so ist

$$Q(0) = Q(\infty) = 1,$$

und deshalb ist das Product

$$\prod_{\lambda=-\infty}^{+\infty} Q(xq^\lambda),$$

erstreckt über alle ganzen Zahlen λ, unbedingt convergent. Dies ist eine doppelt periodische Function, die genau für dieselben Werthe 0 und ∞ wird, wie $\varphi(u)$. Sie ist deshalb mit $\varphi(u)$ bis auf einen constanten Factor identisch. Folglich setzt sich die Aenderung von $\log\varphi(u)$ additiv zusammen aus denen der einzelnen Functionen

$$\log Q(xq^\lambda) = \log\left(\frac{x-cq^\lambda}{x-cq^{\lambda+k}}\right) + \log R(xq^\lambda),$$

$\log R(xq^\lambda)$ aber bleibt ungeändert. Die andere Grösse ist 0, wenn $k=0$ ist. Ist aber k positiv, so liegt für $\lambda=-1, -2, \ldots, -k$ der Punkt cq^λ ausserhalb, dagegen $cq^{\lambda+k}$ innerhalb des Kreises. Für die übrigen Werthe von λ liegen beide Punkte auf der gleichen Seite. Also erfahren k von diesen Logarithmen die Aenderung $-2\pi i$, während die übrigen ungeändert

bleiben. Somit ist:

$$\int_0^{2\omega} d\log\varphi(u) = -2k\pi i.$$

Setzt man nun:

$$u_a = d_a.2\omega+e_a.2\omega',$$
$$v_a = d'_a.2\omega+e'_a.2\omega',$$

wo die d und e reelle Grössen bedeuten sollen, so ist offenbar e_a der Abstand des Punktes u_a von der Grundlinie, gemessen durch die Höhe des Parallelogramms. Aus (3.) aber folgt:

$$\Sigma e_a - \Sigma e'_a = k.$$

Damit ist die Richtigkeit des aufgestellten Satzes bewiesen.

Betrachtet man statt $\log\varphi(u)$ die Quadratwurzel aus $\varphi(u)$, so geht diese auf irgend einem Periodenwege in sich selbst über oder in $-\sqrt{\varphi(u)}$, je nachdem k eine gerade oder ungerade Zahl ist. Nehmen wir den einfachsten Fall, wo $\varphi(u)$ eine Function zweiten Grades mit den Perioden 2ω, $2\omega'$ ist, deren Nullpunkte zusammenfallen, ebenso wie die Unendlichkeitspunkte. Hier ist $\sqrt{\varphi(u)} = \psi(u)$ selbst eine eindeutige Function, und zwar ein Thetaquotient. Der Nullpunkt von $\psi(u)$ kann sich dann von dem Unendlichkeitspunkt nur um eine halbe Periode unterscheiden. Ist diese halbe Periode ω, so haben beide dieselbe Höhe über der Grundlinie, und deshalb ist $k=0$, also $\psi(u+2\omega) = \psi(u)$. Wenn aber die Differenz der beiden Punkte gleich ω' oder $\omega+\omega'$ ist, so ist $e_1-e'_1 = \pm\frac{1}{2}$, und daher $\psi(u+2\omega) = -\psi(u)$.

Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischer Raumcurven.

(Von Herrn *K. Th. Vahlen.*)

Herr *Kronecker* pflegte in seinen Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen zu zeigen, dass eine ν-fache, einer n-fachen entnommene algebraische Mannigfaltigkeit im Allgemeinen erst durch $n+1$ algebraische Gleichungen vollständig dargestellt werde (vgl. *Kronecker,* Festschrift § 10). Dass eine solche Darstellung zuweilen wirklich nothwendig wird, wenn man nicht zur Parameterdarstellung greifen oder Ungleichungen hinzunehmen will, geht in folgender Weise aus bekannten Sätzen hervor.

Die Schnittcurve zweier Flächen F_μ und F_ν, resp. μter und νter Ordnung, zerfalle in zwei Raumcurven R_m^p und $R_{m'}^{p'}$, deren Ordnungen m, m' und deren Geschlechter p und p' seien. Durch Gleichsetzung der Anzahlen der scheinbaren Doppelpunkte der ganzen Schnittcurve und derjenigen der zerfallenden erhält man die Anzahl der wirklichen Schnittpunkte der R_m^p und der $R_{m'}^{p'}$, nämlich $s = m(\mu+\nu-4)-2(p-1)$. Legt man noch eine dritte Fläche F_ϱ, ϱ-ter Ordnung, durch die R_m^p allein, so wird dieselbe von der $R_{m'}^{p'}$ in $m'\varrho-s$ oder in $S = \mu\nu\varrho-m(\mu+\nu+\varrho-4)+2(p-1)$ Punkten geschnitten, die auf allen drei Flächen F_μ, F_ν, F_ϱ, aber nicht auf der R_m^p liegen.

Für eine gegebene R_m^p können im Allgemeinen nicht drei Flächen so bestimmt werden, dass die Anzahl S verschwindet. Es ergiebt sich dies aus dem einfachsten Beispiele der R_5^0 mit nur einer Quadrisecante. Sollte die Anzahl

$$\mu\nu\varrho-5(\mu+\nu+\varrho-4)-2,$$

oder

$$(\mu-3)(\nu-3)(\varrho-3)+3((\mu-3)(\nu-3)+(\mu-3)(\varrho-3)+(\nu-3)(\varrho-3)) +4(\mu+\nu+\varrho-9)$$

verschwinden, so müsste, da keine Fläche zweiter Ordnung durch diese R_5^0 geht (s. *Noether,* Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven § 14 u. 15, Bd. 93 dieses Journals), $\mu = \nu = \varrho = 3$ sein. Aber durch drei Flächen dritter Ordnung wird diese R_5^0 nicht isolirt dargestellt, weil jede F_3 vier Punkte der Quadrisecante, also diese selbst enthält. Nimmt man nun zu zwei Flächen dritter Ordnung eine dritte von der Ordnung $\varrho > 3$ hinzu, so entstehen $4(\varrho - 3)$ ausserhalb der R_5^0 gelegene Schnittpunkte; diese R_5^0 wird daher erst durch vier Flächen vollständig dargestellt.

Eine analytisch-arithmetische Formel.

(Von *L. Kronecker.*)

Bezeichnet man mit ϱ_n alle positiven echten Brüche, welche in ihrer reducirten Form den Nenner n haben und nicht grösser als $\frac{1}{2}$ sind, so ist der Werth des über alle solche Brüche ϱ_n erstreckten Products $\Pi 2\sin\varrho_n\pi$, wenn die Zahl n *verschiedene* Primfactoren enthält, gleich 1, aber wenn n die Potenz einer Primzahl p ist, gleich dem absoluten Werthe von $\sqrt{p}$. Hieraus folgt unmittelbar die Formel:

$$\prod_{\varrho}(2\sin\varrho\pi)^2 = \prod_{h} p_h^{\lambda_h} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei die Multiplication links auf *alle* reducirten positiven echten Brüche ϱ zu erstrecken ist, die selbst nicht grösser als $\frac{1}{2}$ sind, und deren Nenner nicht grösser als N ist, während die Multiplication rechts sich auf *alle* Primzahlen $p_1, p_2, \ldots$ bezieht und die ganzen Zahlen λ_h durch die Ungleichheitsbedingung $p_h^{\lambda_h} \leqq N < p_h^{\lambda_h+1}$ oder $\lambda_h \log p_h \leqq \log N < (\lambda_h+1)\log p_h$ bestimmt werden. Nach der *Gauss*schen Bezeichnungsweise der grössten Ganzen ist daher:

$$\lambda_h = \left[\frac{\log N}{\log p_h}\right],$$

und die obige Formel kann hiernach in folgender Weise dargestellt werden:

$$\prod_{\varrho}(2\sin\varrho\pi)^2 = \prod_{p} p^{\left[\frac{\log N}{\log p}\right]},$$

oder auch *so:*

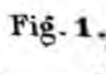
$$\prod_{\varrho}(2\sin\varrho\pi)^2 = \prod_{m}(p_{m1}p_{m2}\ldots)^m \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

wenn $p_{m1}, p_{m2}, \ldots$ alle Primzahlen sind, die zwischen der $(m+1)$ten und der $m$ten Wurzel aus N liegen, und zwar die obere Grenze eingeschlossen.

Geht man endlich zu den Logarithmen über, so erhält man die merkwürdige Formel:

$$\frac{2}{\log N}\sum_{\varrho}\log 2\sin\varrho\pi = \sum_{p}\left[\frac{\log N}{\log p}\right]\frac{\log p}{\log N},$$

in welcher die Summation rechts auf *alle* Primzahlen (p), links auf alle reducirten positiven echten Brüche (ϱ) zu erstrecken ist, welche keinen grösseren Nenner als N haben und deren Werth nicht $\frac{1}{2}$ übersteigt.



G. Hauck, Theorie

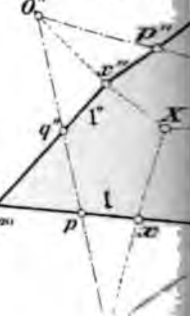


Fig. 7.

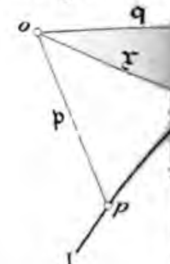




Fig. 1

